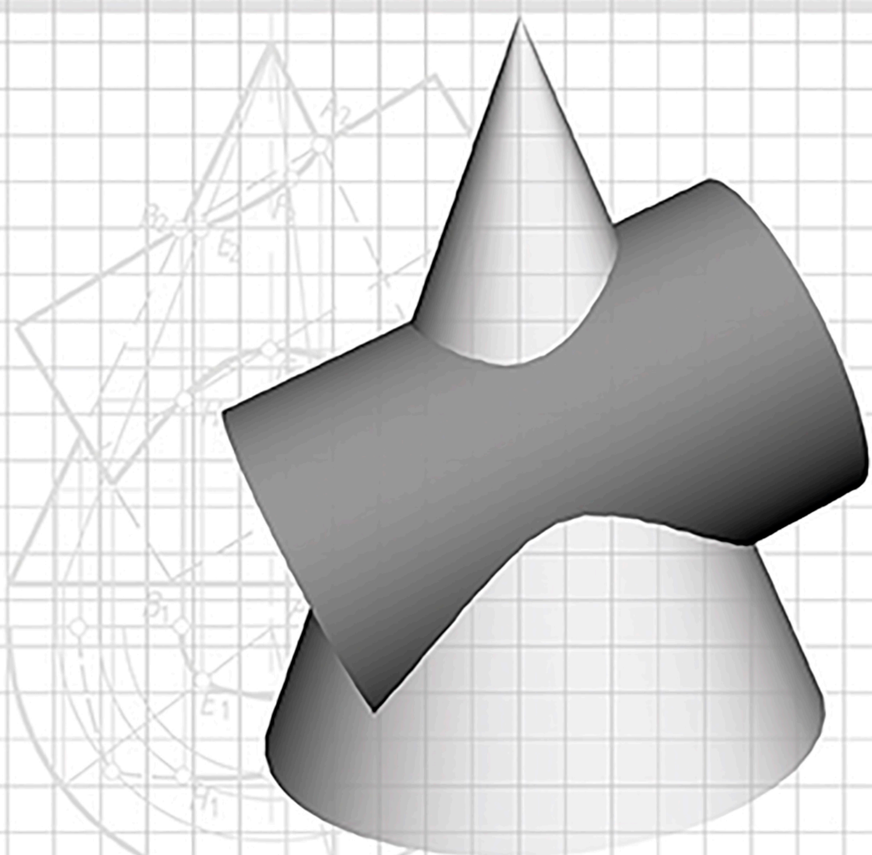
В. В. Корниенко
В. В. Дергач
А. К. Толстихин
И. Г. Борисенко

НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ



ЛАНЬ

В. В. КОРНИЕНКО,
В. В. ДЕРГАЧ,
А. К. ТОЛСТИХИН,
И. Г. БОРИСЕНКО

НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Издание четвертое,
исправленное и дополненное

ДОПУЩЕНО
УМО по профессионально-педагогическому образованию
в качестве учебного пособия для студентов вузов,
обучающихся по специальности 050501.07 — «Профессиональное обучение
(материаловедение и обработка материалов)»

ЛАНЬ®
САНКТ-ПЕТЕРБУРГ • МОСКВА • КРАСНОДАР
2013

ББК 22.151.3я73
К 67

Корниенко В. В., Дергач В. В., Толстихин А. К., Борисенко И. Г.

К 67 Начертательная геометрия: Учебное пособие. — 4-е изд., испр. и доп. — СПб.: Издательство «Лань», 2013. — 192 с.: ил. — (Учебники для вузов. Специальная литература).

ISBN 978-5-8114-1467-3

В учебном пособии изложены основные методы проецирования, позволяющие строить изображения пространственных геометрических образов на плоскости, способы решения позиционных и метрических задач, имеющих практическое значение.

Пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлениям «Металлургия, машиностроение и материалообработка», «Транспортные средства», «Технология продовольственных продуктов и потребительских товаров», «Агроинженерия», «Технологические машины и оборудование», «Управление качеством», «Стандартизация и метрология», «Ландшафтная архитектура» и «Безопасность жизнедеятельности, природоустройство и защита окружающей среды».

ББК 22.151.3я73

Рецензенты:

Г. В. ЕФРЕМОВ — доцент, зав. кафедрой «Инженерная графика» Сибирского государственного аэрокосмического университета; *И. И. АСТАПКОВИЧ* — кандидат технических наук, доцент, зав. кафедрой «Инженерная графика» Сибирского государственного технологического университета.

Обложка
Е. А. ВЛАСОВА

ВВЕДЕНИЕ

В начертательной геометрии под геометрическим телом понимают предмет, лишенный всех свойств, кроме пространственных. Поэтому точка рассматривается как тело, лишенное размеров, линия — тело, лишенное толщины и ширины, а поверхность — часть тела, мысленно отделенная от него и лишенная толщины. След, оставляемый при движении точки в пространстве, образует линию, а линия при ее движении порождает поверхность, которая порождает тело.

В природе нет геометрических точек, линий и поверхностей, но все их геометрические свойства находят применение при изучении и проектировании тех или иных объектов. Изучение геометрических свойств в чистом виде является основной задачей дисциплины «Начертательная геометрия», рассматривающей геометрические модели, в отличие от математических, которые отображаются в виде формул, описывающих основные свойства объекта и физических моделей.

Начертательная геометрия — область науки и техники, занимающаяся разработкой научных основ построения и исследования геометрических моделей проектируемых инженерных объектов и процессов и их графического отображения. Задачи этой науки — создание оптимальных геометрических форм объектов машиностроения, архитектуры и строительства, разработка геометрических основ их воспроизведения в процессе производства, оптимизация технологических процессов на основе их геометрических моделей, разработка теории графического отображения объектов и процессов при их проектировании в промышленности и строительстве.

Начертательная геометрия является одним из разделов геометрии, в котором *пространственные формы* (совокупности точек, линий, поверхностей) с геометрическими закономерностями изучаются в виде их изображений на плоскости.

С изучением начертательной геометрии приходит умение изображать всевозможные сочетания геометрических форм на плоскости, решать позиционные и метрические задачи, производить исследования геометрических образов по их изображениям.

Начертательную геометрию называют «грамматикой языка техники». Кроме того, она по своему содержанию и методам занимает особое положение среди других наук. Наглядность и простота решения многих задач не только обогащают точные науки, но и помогают работникам изобразительного искусства (художникам, архитекторам, скульпторам) в создании их произведений. Художнику и архитектору знания по начертательной геометрии нужны для построения перспективы предметов, т. е. для изображения предметов такими, какими они представляются в действительности нашему глазу. Скульптору они нужны для определения очертания ваяния, которое создается из куска камня, дерева, глины и т. п.

В инженерной практике мы часто встречаемся с геометрическими моделями в виде чертежей, которые являются средством общения людей в их производственной деятельности.

Словесное описание не может заменить чертежа, построенного по определенным геометрическим правилам. Начертательная геометрия — наилучшее средство развития у человека пространственного воображения, без которого немыслимо никакое техническое творчество. Без живой силы воображения и наглядности мышления нельзя прийти и к абстрактной, математической формулировке проблемы, невозможно вывести понятия, а тем более осуществить практически экспериментальные исследования.

При использовании систем автоматизированного проектирования основной проблемой является математическое описание геометрических форм рассматриваемых объектов. На качестве проектируемых технических объектов в значительной степени будут сказываться знания и умение использовать геометрические закономерности.

В математических науках вопросы теории геометрических форм и их сочетаний сопровождаются реальным и конкретным их представлением. Решая математические задачи в их графическом значении, начертательная геометрия находит применение в физике, астрономии, химии, механике, кристаллографии и многих других науках. Методы начертательной геометрии являются связующим звеном между прикладной математической наукой и профессиональными техническими дисциплинами.

1 ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ПОЛОЖЕНИЯ

В начертательной геометрии, как и в любой другой области математики, для упрощения записи условий и решения задач принята система условных обозначений элементов и действий. Ниже приведены используемые в процессе изучения дисциплины символы и условные обозначения.

1.1. ОБОЗНАЧЕНИЯ И СИМВОЛИКА

При изучении дисциплины используются специальные символы и знаки, обозначающие те или иные геометрические элементы или понятия. Это позволяет кратко записывать геометрические положения, алгоритмы решения задач и доказательства теорем.

Условные обозначения объектов и действий, которые будут использоваться в данном курсе при изучении теоретического материала и записи алгоритмов решения задач, следующие.

1. Геометрическая фигура — Ф.

2. Точки — прописные буквы латинского алфавита или арабские цифры — A, B, C, D, ... или 1, 2, 3, 4, ...

3. Линии, произвольно расположенные в пространстве по отношению к плоскостям проекций: a, b, c, d, ...

Линии уровня: h — горизонталь; f — фронталь; p — профильная прямая линия уровня.

Кроме того, прямые линии обозначаются так:

(AB) — прямая, проходящая через точки A и B;

$[AB)$ — луч с началом в точке A;

$[AB]$ — отрезок прямой, ограниченный точками A и B;

$|AB|$ — расстояние от точки A до точки B (длина отрезка AB);

$|Aa|$ — расстояние от точки A до прямой линии a;

$|A\Phi|$ — расстояние от точки A до плоскости Ф;

$|\Sigma\Omega|$ — расстояние между плоскостями Σ и Ω.

4. Углы обозначаются как α, β, γ, ... , $\angle\alpha$, $\angle\beta$, $\angle\gamma$, а также $\angle ABC$ — угол с вершиной в точке B.

5. Поверхности обозначаются строчными буквами греческого алфавита: α, β, γ, δ, ...

Для обозначения способа задания поверхности указывают геометрические элементы, которыми она определяется, например:

$\alpha\,(a \| b)$ — плоскость α задана двумя параллельными прямыми a и b;

$\Phi\,(g, i)$ — поверхность определяется образующей g и осью вращения i.

6. Центр и направление проецирования обозначаются S и $\vec{S}$ соответственно.

Плоскости проекций обозначаются греческой буквой Π (π), причем:

Π_1, π_1 — горизонтальная плоскость проекций $x0y$;

Π_2, π_2 — фронтальная плоскость проекций $x0z$;

Π_3, π_3 — профильная плоскость проекций $y0z$.

При замене плоскостей проекций или введении новых плоскостей их обозначают как π_4, π_5 и т. д.

Оси проекций:

x — ось абсцисс;

y — ось ординат;

z — ось аппликат.

7. Координаты точек A, B, ... обозначаются как x_A, y_A, z_A, x_B, y_B, z_B, ...

8. Проекции точек, линий, поверхностей, любой геометрической фигуры обозначают теми же буквами (или цифрами), что и оригинал, с добавлением нижнего индекса, соответствующего плоскости проекции, на которой они получены:

A_1, B_1, C_1 , ... — горизонтальные проекции точек;

A_2, B_2, C_2, ... — фронтальные проекции точек;

A_n, B_n, C_n, ... — проекции точек на дополнительную (n-ю) плоскость проекций;

a_1, b_1, c_1, ... — горизонтальные проекции линий;

a_2, b_2, c_2, ... — фронтальные проекции линий;

a_n, b_n, c_n, ... — проекции линий на дополнительную (n-ю) плоскость проекций.

Символы, обозначающие отношения между геометрическими фигурами, следующие:

$=$ — результат действия, знак равенства, например: $|AB|=|CD|$ — длины отрезков AB и CD равны;

$\equiv$ — совпадение, тождество, например: $A_1 \equiv B_1$ — горизонтальные проекции точек A и B совпадают;

$\cong$ — конгруэнтность (отношение эквивалентности на множестве геометрических фигур);

$\perp$ — перпендикулярность;

$//$ — параллельность;

$\underline{\bigcirc}$ — скрещивание;

$\times$ или $\cap$ — пересечение;

$\Rightarrow$ — импликация (логическое следствие). Например, $a \Rightarrow b$ означает, что «если есть a, то есть и b, или из a следует b»;

$\in$, $\ni$ — принадлежность, например: $A \in a$ — точка A принадлежит прямой a; $A \ni a$ — прямая a проходит через точку A;

$\sim$ — подобие;

$\supset$, $\subset$ — включение (содержит в себе), например: $\Omega \supset a$ — плоскость Ω проходит через прямую a; $a \subset \Omega$ — прямая принадлежит плоскости Ω;

$\cup$ — объединение множеств. Так, $ABCD = [AB] \cup [BC] \cup [CD]$ — ломаная $ABCD$ состоит из отрезков AB, BC, CD;

$\not\subset$, $\notin$, $\neq$ — отрицание, например: $A \notin a$ — точка A не принадлежит прямой a, или прямая a не проходит через точку A;

$\wedge$ — конъюнкция предложений, соответствует союзу «*и*»;

$\vee$ — дизъюнкция предложений, соответствует союзу «*или*»;

$\forall$ — квантор общности, читается так: «для всех, для любого». Выражение $\forall(x)P(x)$ означает «для всякого x имеет место свойство $P(x)$»;

$\exists$ — квантор существования, читается так: «существует». Выражение $\exists(x)P(x)$ означает «существует x, обладающее свойством $P(x)$»;

$\exists^1$ — квантор единственности существования, читается так: «существует единственное (-я, -й) ... ». Выражение $(\exists^1 x)(Px)$ означает: существует единственное (только одно) x, обладающее свойством Px;

$(\overline{Px})$ — отрицание высказывания (Px). Например, $a \bigcirc b \Rightarrow (\overline{\exists\alpha})(\alpha \supset a, b)$. Если прямые a и b скрещиваются, то не существует плоскости α, которая содержит их;

$\setminus$ — отрицание знака.

1.2. СВОЙСТВА ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА И ЕГО РЕКОНСТРУКЦИЯ

Изображение предмета на какой-либо поверхности можно получить путем проецирования его на данную поверхность. При этом предполагается, что основные свойства трехмерного пространства могут быть выражены следующими положениями.

1. Если точка A принадлежит прямой a, которая принадлежит плоскости α, то точка A принадлежит плоскости α (рис. 1.1):

$$A \in a \in \alpha \Rightarrow A \in \alpha.$$

2. Две различные точки A и B всегда принадлежат одной и той же и только одной прямой a (или каждой прямой a принадлежат по крайней мере две точки A и B) (рис. 1.2):

$$(\forall A, B)\,(A \neq B) \Rightarrow (\exists^1 a)\,(a \in A, B).$$

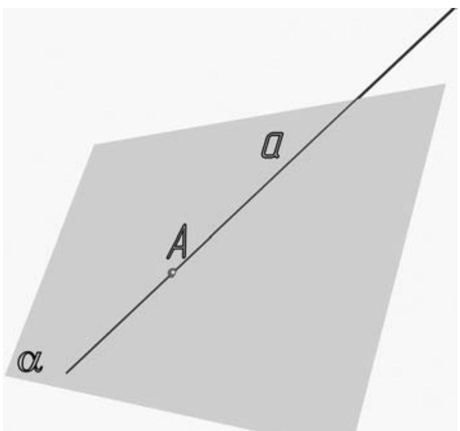


Рис. 1.1

3. Три различные точки A, B и C, не принадлежащие одной прямой, принадлежат одной и той же и только одной плоскости (рис. 1.3):

$$(\forall A, B, C)\,(A \neq B \neq C) \wedge (A, B, C \notin a) \Rightarrow (\exists^1 \alpha)\,(\alpha \in (A, B, C)).$$

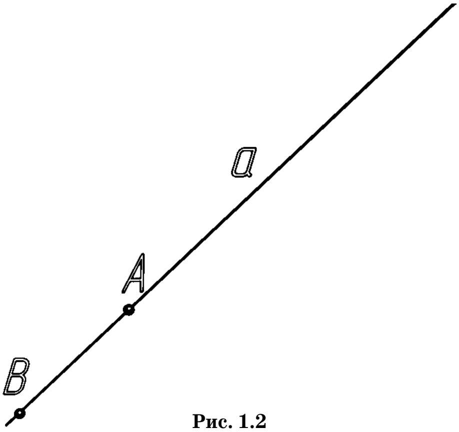


Рис. 1.2

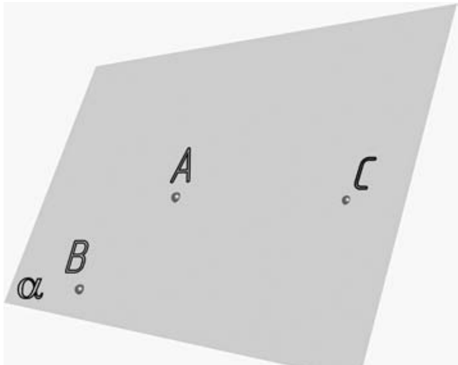


Рис. 1.3

4. Если две точки A и B, принадлежащие прямой a, принадлежат плоскости α, то прямая a принадлежит плоскости α (рис. 1.4):

$$(\forall A, B)\,(A \neq B)\,(A, B \in a) \wedge (A, B \in \alpha) \Rightarrow (a \in \alpha).$$

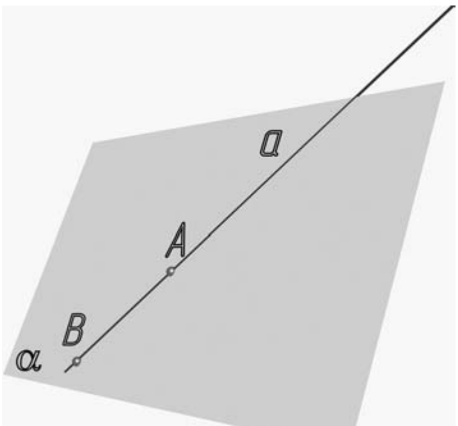


Рис. 1.4

Помимо указанных свойств, можно добавить следующие три положения, касающиеся аксиомы параллельности.

5. Две прямые, принадлежащие одной плоскости, могут принадлежать (рис. 1.5*а*) или не принадлежать (рис. 1.5*б*) одной точке, т. е. две прямые либо пересекаются, либо параллельны:

$$(\forall a, b)\,(a \neq b)\,(a, b \in \alpha) \Rightarrow (a \cap b) \vee (a \parallel b).$$

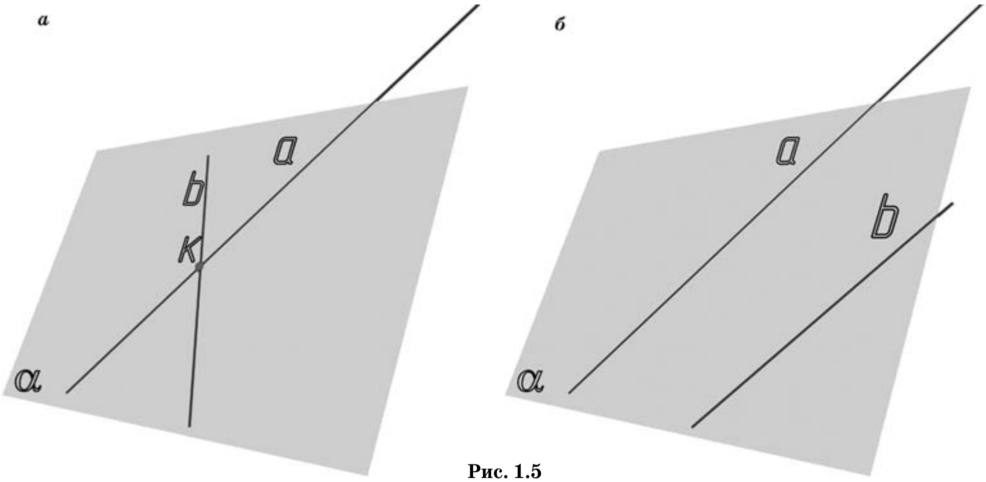


Рис. 1.5

6. Две плоскости могут принадлежать (рис. 1.6*а*) или не принадлежать (рис. 1.6*б*) одной и той же прямой, т. е. две плоскости либо пересекаются, либо параллельны:

$$(\forall\alpha,\ \beta)\ (\alpha\neq\beta)\Rightarrow(\alpha\cap\beta)\vee(\alpha\parallel\beta).$$

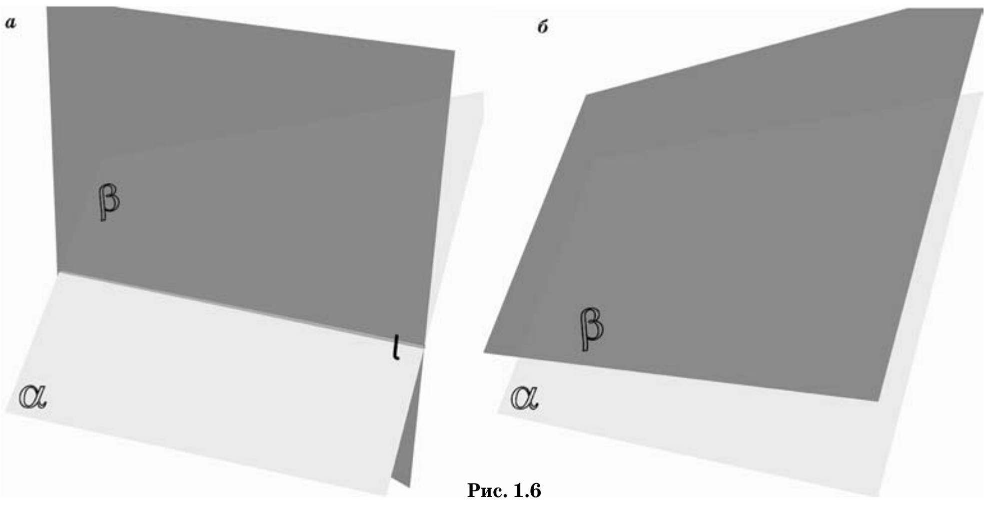


Рис. 1.6

7. Плоскость и не принадлежащая ей прямая могут принадлежать (рис. 1.7*а*) или не принадлежать (рис. 1.7*б*) одной точке, т. е. не принадлежащая плоскости прямая может ее либо пересекать, либо быть ей параллельной:

$$(\forall a,\ \alpha)\ (a\in\alpha)\Rightarrow(a\cap\alpha)\vee(a\parallel\alpha).$$

Три последних положения о параллельности при последующем изучении начертательной геометрии приводят к некоторым трудностям, так как при проецировании на плоскость геометрических фигур, расположенных в пространстве, мы сталкиваемся с неоднородностью евклидова пространства

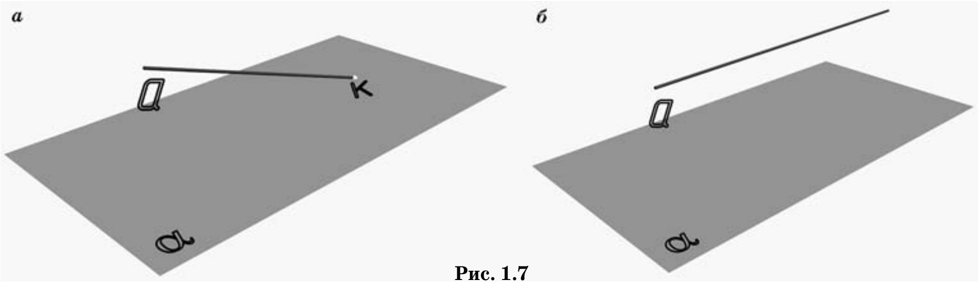


Рис. 1.7

и находящихся в нем фигур. Для того чтобы избавиться от неоднородности пространства, необходимо выполнить его реконструкцию, т. е. допустить существование на прямой бесконечно удаленной точки — несобственной точки, на плоскости — несобственной прямой, в пространстве — несобственной плоскости. В результате три последних положения можно перефразировать следующим образом:

- п. 5*а* — две прямые, принадлежащие одной плоскости, всегда принадлежат одной и той же и только одной точке, т. е. параллельные прямые принадлежат одной и только одной *несобственной точке* — K^{∞} (точка находится в бесконечности) (рис. 1.8) и пересекающиеся прямые (рис. 1.5*а*) принадлежат одной и той же и только одной точке K:

$$(\forall a, b)\,(a \neq b)\,(a, b \in \alpha) \Rightarrow (a, b \in K \vee K^{\infty});$$

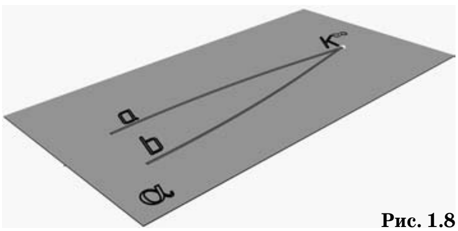


Рис. 1.8

- п. 6*а* — две различные плоскости всегда принадлежат одной и той же и только одной прямой, т. е. две плоскости имеют либо одну несобственную прямую — l^{∞}, находящуюся в бесконечности (параллельные плоскости) (рис. 1.9), либо одну прямую, находящуюся в конечном пространстве (пересекаются) (рис. 1.6*б*):

$$(\forall \alpha, \beta)\,(\alpha \neq \beta) \Rightarrow (\alpha, \beta \in \mathrm{l} \vee \mathrm{l}^{\infty});$$

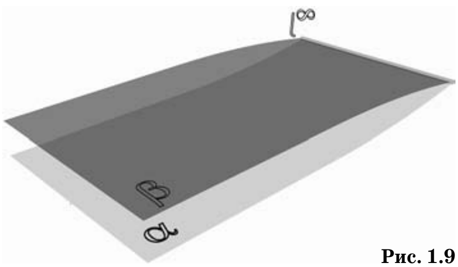


Рис. 1.9

• п. 7a — плоскость и не принадлежащая ей прямая всегда принадлежат одной и той же и только одной точке, т. е. точка будет либо собственной (рис. 1.7a), либо несобственной (рис. 1.10) точкой.

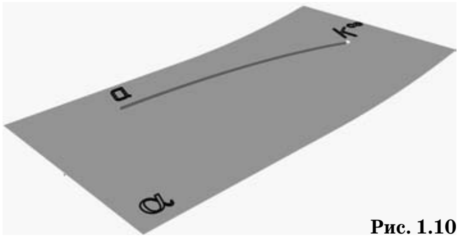


Рис. 1.10

Таким образом, используя понятия несобственной точки и прямой, находящихся в бесконечности, мы реконструировали евклидово пространство, что в дальнейшем позволит определять проекции любой точки на плоскостях проекций способом центрального проецирования.

2 МЕТОД ПРОЕКЦИЙ

В начертательной геометрии при проецировании необходимо установить однозначную связь между проецируемым объектом и его отображением на плоскости. При этом полученная проекция зависит от того способа, при помощи которого получается отображение. Причем тот или иной способ должен отвечать тем задачам, которые необходимо решить в конкретных (иных) областях знаний.

2.1. ЦЕНТРАЛЬНОЕ ПРОЕЦИРОВАНИЕ

При центральном проецировании задаются плоскость П и точка S, не принадлежащая плоскости (рис. 2.1). Проводят прямую, проходящую через точки A и S, и отмечают точку A_{Π} на плоскости П, в которой прямая AS пересечет ее. Точку S называют *центром проецирования*, прямую SA — *проецирующим лучом* или *проецирующей прямой*, полученную точку A_{Π} — *центральной проекцией* точки A на *плоскость проекций* П. Положение плоскости П и центра S определяет аппарат центрального проецирования. Иными словами, зная положение S и П, всегда можно определить положение проекции любой точки пространства на плоскости проекции.

В самом деле, для любой другой точки B можно провести проецирующую прямую и найти точку ее пересечения с плоскостью П. Проекция точки C, находящейся на плоскости проекции, совпадет с самой точкой ($C_{\Pi} \equiv C$).

Любая точка D, находящаяся в плоскости, которая проходит через центр проецирования параллельно плоскости проекции, будет иметь в качестве проекции несобственную точку D_{Π}^{∞} (рис. 2.1).

Таким образом, для каждой точки в пространстве (при указанном аппарате проецирования) существует только одна проекция. Однако одна проекция не определяет поло-

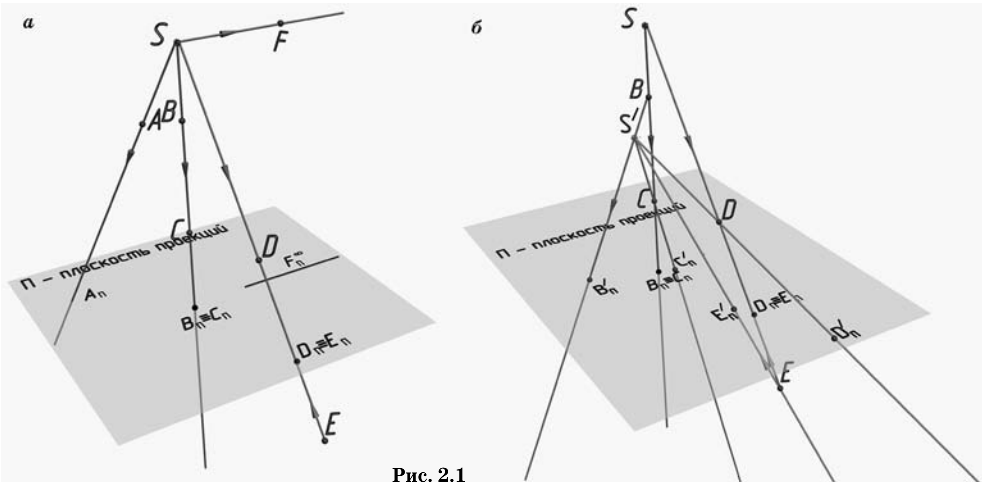


Рис. 2.1

жения точки в пространстве, т. е. для проекции точки на плоскости проекций можно показать множество точек пространства, принадлежащих одному и тому же проецирующему лучу. На рисунке 2.1*а* на одном проецирующем луче лежат точки S, B, C, на другом — S, E, D. В данном случае по одной проекции нельзя судить о положении точки в пространстве. Поэтому необходимо использовать еще один центр проецирования. На рисунке 2.1*б* показано проецирование с использованием двух центров — S и S'. Как видно из рисунка, для того чтобы определить положение точки в пространстве по проекциям с использованием двух центров проецирования, достаточно найти точку пересечения соответствующих проецирующих лучей.

2.2. ПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ПРОЕЦИРОВАНИЕ

Параллельное проецирование можно рассматривать как частный случай центрального проецирования, когда центр проекции находится в бесконечности. Тогда все проецирующие лучи будут параллельны. На рисунке 2.2*а* показано нахождение параллельной проекции точек A, B и C. Как и для центрального проецирования, нам необходимо выбрать положение плоскости проекции П, а проецирующие лучи будем направлять параллельно какому-либо выбранному направлению $\overline{S}$, которое назовем направлением проецирования. В связи с параллельностью проецирующих прямых рассматриваемый способ проецирования называется *параллельным*, а полученные с его помощью проекции — *параллельными проекциями*.

2.2.1. КОСОУГОЛЬНОЕ ПРОЕЦИРОВАНИЕ

Если направление проецирования не перпендикулярно и не параллельно плоскости проекций, то проецирование будет *косоугольным*.

Свойство центрального проецирования сохраняется и для параллельного проецирования, которое можно сформулировать так: каждая точка про-

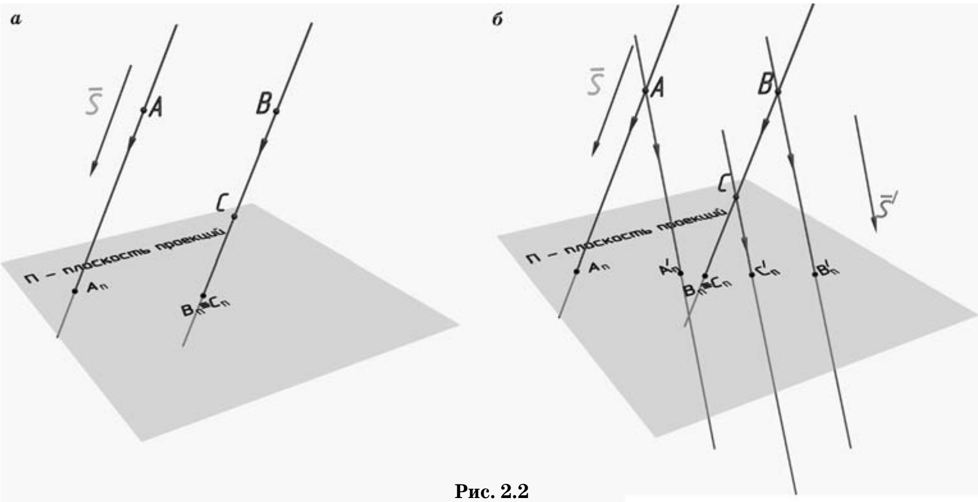


Рис. 2.2

странства при параллельном проецировании будет иметь только одну проекцию. Как и в случае центрального проецирования, обратное утверждение неправомочно. Действительно, проекция A_{Π} может быть проекцией точек $A^1, A^2, A^3, \dots, A^n$, расположенных на одном и том же проецирующем луче, что и точка A.

Имея два различных направления проецирования, мы получаем две проекции точки, по которым сможем однозначно определить положение точки в пространстве (рис. 2.2*б*).

В этом случае положение точки A или B определяется пересечением прямых, проведенных через A_{Π}^1 и A_{Π} или B_{Π}^1 и B_{Π}, параллельно соответствующим направлениям проецирования.

Достоинство центрального проецирования заключается в наглядности проекций, которые используют в построениях перспективы различных сооружений. Изображения, полученные с помощью центрального проецирования, являются основой зрительного восприятия окружающего нас мира, их применяют в проектировании объекта в завершенном виде.

Перспективные изображения очень близки нашим зрительным представлениям о предмете. Это объясняется устройством нашего зрительного органа (глаза), работающего по принципу оптического проецирования. Аналогичный принцип характерен для конструкций проекционной аппаратуры (фото- и киноизображения).

2.2.2. ОРТОГОНАЛЬНОЕ ПРОЕЦИРОВАНИЕ

Если направление проецирования выбрать перпендикулярно плоскости проекций П, то получим *прямоугольное*, или *ортогональное*, *проецирование*. На рисунке 2.3 показана суть ортогонального проецирования точки.

Для однозначного определения положения точки в пространстве необходимо, кроме плоскости проекций Π_1, показать еще одну плоскость проекций $П_2$ (рис. 2.4), тем самым добавляется еще одно направление проецирования.

Таким образом, можно отметить основное свойство ортогонального проецирования: если положение плоскостей проекций $П_1$ и $П_2$ фиксировано, то

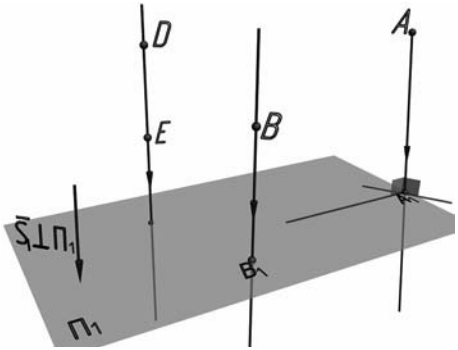


Рис. 2.3

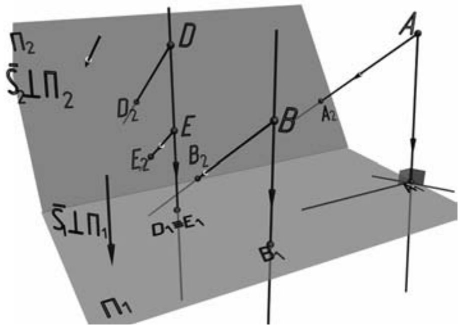


Рис. 2.4

каждой точке пространства будут соответствовать две ее проекции, и обратно — каждой паре проекций соответствует единственная точка пространства.

Ортогональное проецирование обладает рядом преимуществ перед центральным и параллельным (косоугольным):

1) простота геометрических построений для определения ортогональных проекций точек;

2) возможность при определенных условиях сохранить на проекциях форму и размеры проецируемой фигуры.

Указанные преимущества объясняют столь широкое применение ортогонального проецирования в технике для описания деталей и изделий в виде машиностроительных чертежей.

2.2.3. ИНВАРИАНТНЫЕ СВОЙСТВА ОРТОГОНАЛЬНОГО ПРОЕЦИРОВАНИЯ

В общем случае геометрические фигуры проецируются на плоскость с искажением. Это касается как геометрических размеров, так и взаимного расположения точек, линий, поверхностей. Если ортогонально спроецировать треугольник ABC на плоскость П, не параллельную плоскости треугольника (рис. 2.5), то длины сторон, величины углов и площадь не будут равными оригиналу.

Однако существуют свойства, которые будут сохраняться как у самого объекта, так и у его проекции. Из рисунка 2.5 видно, что точки A, B, C проецируются в точки $A_П$, $B_П$, $C_П$, отрезки $[AB]$, $[BC]$, $[CA]$ — стороны треугольника, проецируются в отрезки $[A_ПB_П]$, $[B_ПC_П]$, $[C_ПA_П]$ — проекции сторон треугольника.

Таким образом, существуют свойства геометрических тел, сохраняющиеся в проекциях при любых преобразованиях. Эти свойства в данном преобразовании называют *инвариантными*, или *проективными*.

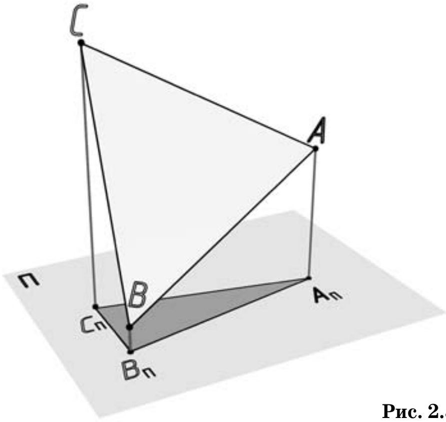


Рис. 2.5

Рассмотрим основные инвариантные свойства ортогонального проецирования.

Свойство 1. Проекция точки на плоскости есть точка (рис. 2.6):

$$A \to A_{\Pi}.$$

Свойство 2. Проекция прямой линии на плоскости есть прямая (рис. 2.7, прямая a); в частном случае, когда прямая перпендикулярна плоскости проекции, — точка (рис. 2.7, прямая b):

$$(\forall a) \wedge (a \not\perp \Pi) : a \to a_{\Pi}.$$

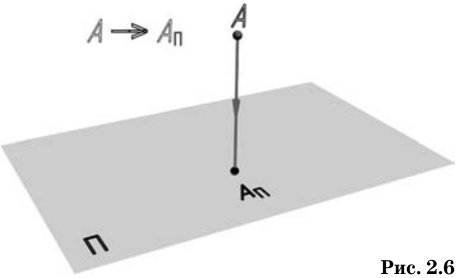


Рис. 2.6

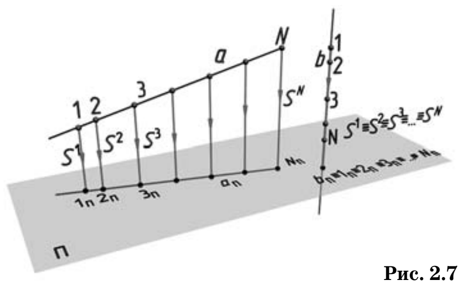


Рис. 2.7

Свойство 3. Если точка принадлежит (инцидентна) линии, то проекция точки принадлежит проекции этой линии (рис. 2.8):

$$A \in a \Rightarrow A_{\Pi} \in a_{\Pi}.$$

Свойство 4. Если точка делит отрезок прямой линии в каком-либо отношении, то и проекция отрезка делится проекцией точки в том же отношении (рис. 2.9):

$$C \in [AB] \Rightarrow \frac{|AC|}{|CB|} = \frac{|A_{\Pi} C_{\Pi}|}{|C_{\Pi} B_{\Pi}|}.$$

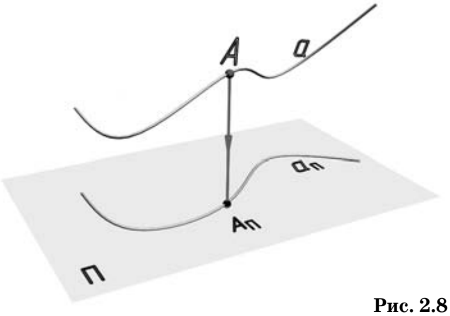


Рис. 2.8

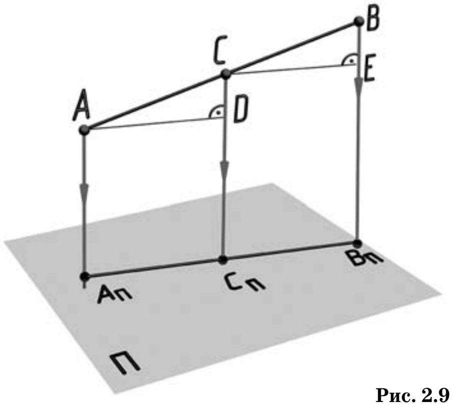


Рис. 2.9

Докажем это свойство. Пусть отрезок [AB] прямой линии делится точкой C в отношении $\dfrac{|AC|}{|CB|}$ (рис. 2.9). Исходя из подобия треугольников ADC и CEB, можно записать

$$\frac{|AD|}{|CE|}=\frac{|AC|}{|CB|}.$$

Учитывая, что $|AD|=|A_{П}C_{П}|$ и $|CE|=|C_{П}B_{П}|$, окончательно получим следующее свойство:

$$\frac{|AC|}{|CB|}=\frac{|A_{П}C_{П}|}{|C_{П}B_{П}|}.$$

Свойство 5. Точка пересечения проекции двух пересекающихся линий является проекцией точки пересечения этих линий (рис. 2.10).

$$K=a\cap b \Rightarrow K_{П}=a_{П}\cap b_{П}.$$

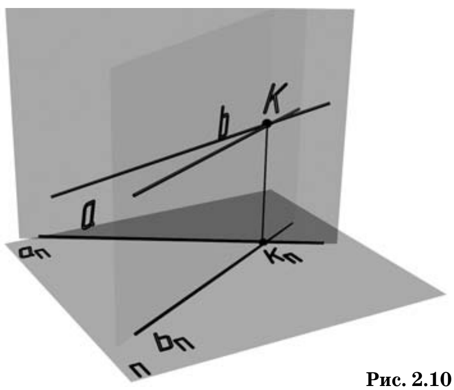


Рис. 2.10

Свойство 6. Проекции отрезков параллельных и не перпендикулярных плоскости проекций прямых параллельны, а их длины находятся в таком же отношении, как и длины этих отрезков:

$$[\mathrm{AB}] \parallel [\mathrm{CD}] \wedge ([\mathrm{AB}] \not\perp \Pi) \Rightarrow [A_\Pi B_\Pi] \parallel [C_\Pi D_\Pi] \wedge \frac{|AB|}{|CD|} = \frac{|A_\Pi B_\Pi|}{|C_\Pi D_\Pi|}.$$

Справедливость последнего утверждения ясна из рисунка 2.11. Два отрезка принадлежат двум параллельным проецирующим плоскостям (забегая вперед, отметим, что проецирующие плоскости перпендикулярны к плоскости проекций, поэтому проецируются в виде прямой линии). Отсюда делаем вывод о параллельности проекций. Наконец, из подобия треугольников ABE и CDF, получаем пропорциональность их сторон.

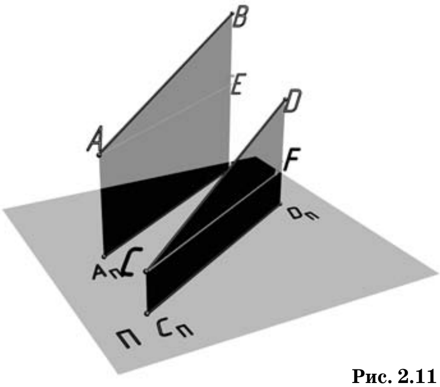
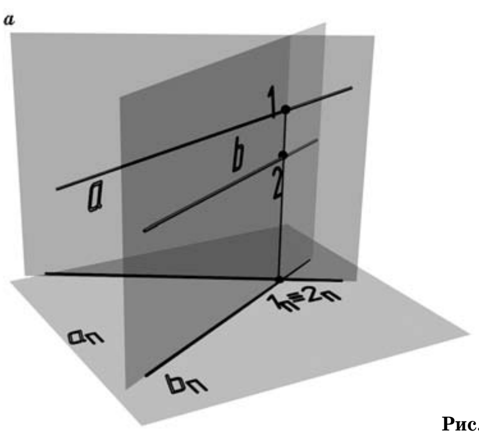


Рис. 2.11

Свойство 7. Проекции двух скрещивающихся (непересекающихся) прямых линий могут или пересекаться (рис. 2.12*а*), или быть параллельными (рис. 2.12*б*):

$$(\forall ab) \Rightarrow (a_\Pi \cap b_\Pi) \vee (a_\Pi \parallel b_\Pi).$$



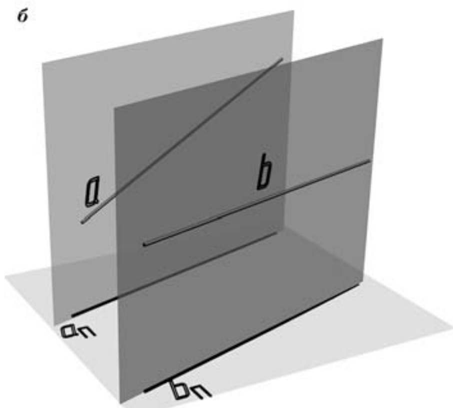


Рис. 2.12

Свойство 8. Прямой угол проецируется без искажения (прямым углом), если одна из его сторон параллельна плоскости проекций, а другая не перпендикулярна ей (рис. 2.13):

$$(a \perp b) \wedge (a \parallel \Pi,\ b \not\perp\ \Pi) \Rightarrow (a_{\Pi} \perp b_{\Pi}).$$

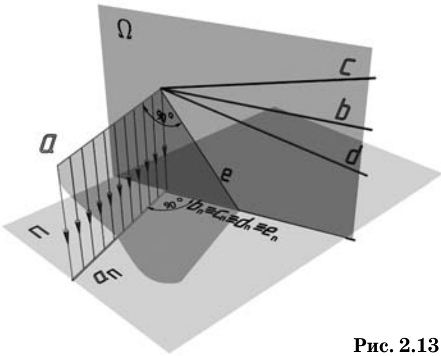


Рис. 2.13

Расположим прямой угол, образованный прямыми a и b, в плоскости, параллельной плоскости проекций П (рис. 2.13). Через прямую b проведем плоскость Ω, перпендикулярную плоскости П. Все прямые, лежащие в плоскости Ω, будут образовывать угол 90° с прямой a. Таким образом, при вращении прямой b вокруг прямой a (положение c, d и e) на плоскости П будет проецироваться одна и та же линия. Причем проекция прямой a на эту же плоскость будет перпендикулярна всем проекциям прямых, лежащих в плоскости Ω, так как a параллельна плоскости проекций П.

Следует отметить, что в виде прямого угла будет проецироваться любой другой угол, у которого стороны лежат во взаимно перпендикулярных плоскостях. Если ни одна из сторон угла не будет параллельна плоскости проекций и он не принадлежит проецирующей плоскости, то прямой угол будет проецироваться в виде тупого (рис. 2.14*а*) или острого (рис. 2.14*б*) угла. Кроме того, проекция тупого или острого угла может выглядеть как

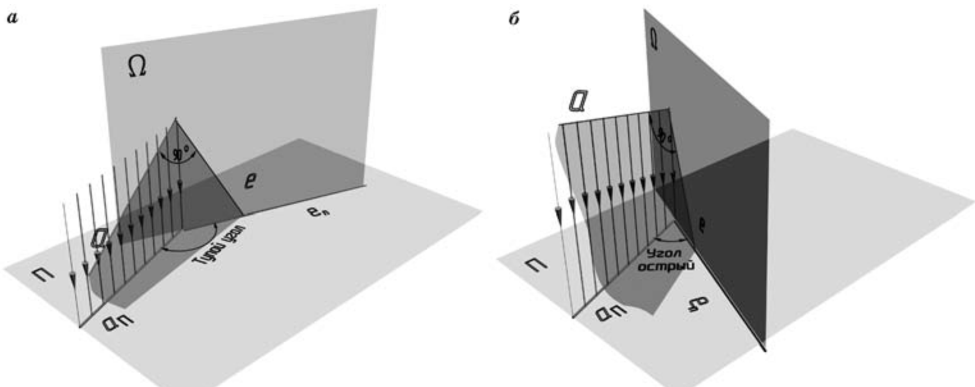


Рис. 2.14

прямой угол. Так на рисунке 2.15*б* тупой угол проецируется как прямой, а на рисунке 2.15*а* прямым будет острый угол, спроецированный на плоскость проекций.

Итак, перпендикуляр к прямой будет проецироваться как перпендикуляр к проекции прямой, когда либо прямая параллельна плоскости проекций, либо перпендикуляр параллелен плоскости проекций, либо плоскости проекций параллельны обе прямые.

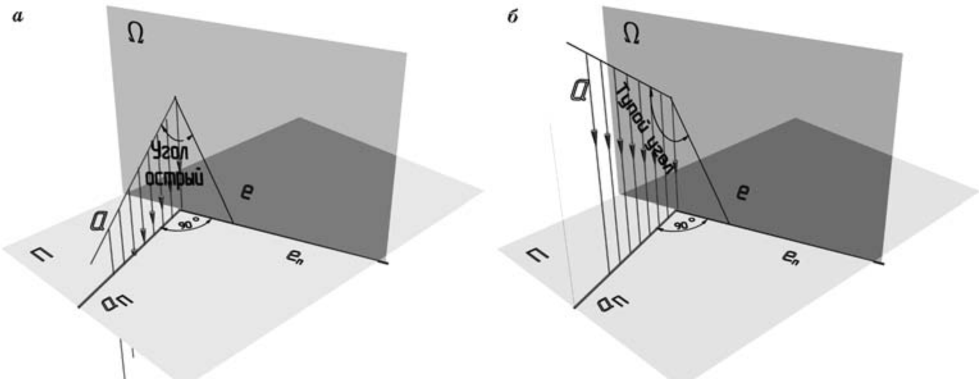


Рис. 2.15

Свойство 9. Плоская фигура, параллельная плоскости проекций, проецируется на эту плоскость без искажения (рис. 2.16):

$$\Phi \| \Pi \Rightarrow \Phi_{\Pi} \cong \Phi.$$

Свойство 10. При параллельном перемещении фигуры или плоскости проекций фигуры не меняются (рис. 2.17):

$$\Phi \to \bar{\Phi} \wedge (\bar{\Phi} \| \Phi) \Rightarrow \Phi_{\Pi} \cong \bar{\Phi}_{\Pi}.$$

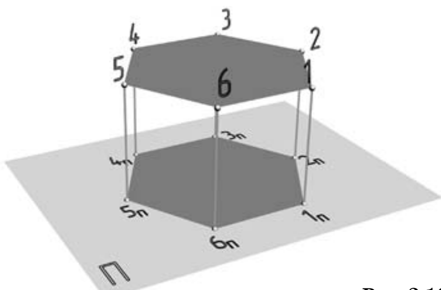


Рис. 2.16

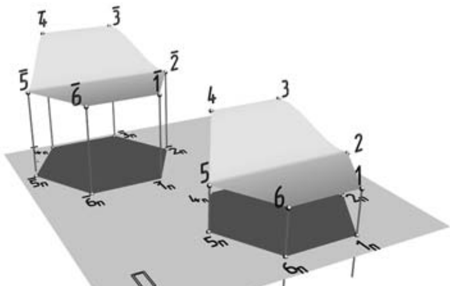


Рис. 2.17

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Дать определение дисциплине «Начертательная геометрия».
2. Какие символы применяют для обозначения геометрических объектов?

3. Какие символы используют для обозначения геометрических понятий?
4. Перечислить свойства евклидова пространства.
5. В чем состоит реконструкция евклидова пространства?
6. Объяснить сущность центрального проецирования.
7. Что такое параллельное проецирование? Привести примеры косоугольного и ортогонального проецирования.
8. Перечислить инварианты ортогонального проецирования.
9. При каких условиях прямой угол проецируется без искажения?
10. В каком случае плоская фигура проецируется на плоскость проекций без искажения?
11. Может ли проекция острого или тупого угла выглядеть как прямой угол?
12. Каковы преимущества ортогонального проецирования перед центральным и параллельным проецированием?
13. Какие элементы определяют аппарат центрального и какие — параллельного проецирования?
14. Какую точку называют несобственной?
15. Какие свойства геометрических тел называются инвариантными?

3 ТОЧКА

В начертательной геометрии любая фигура рассматривается как множество точек, точка — единственное множество.

Точка является элементом более сложных фигур, таких, как прямая, плоскость, поверхность. Поэтому изучение построения чертежей начинают с построения точки на плоскостях проекций и ее пространственного изображения в заданной системе координат.

3.1. СИСТЕМА КООРДИНАТ. КООРДИНАТНЫЕ ПЛОСКОСТИ ПРОЕКЦИЙ

Все геометрические образы будем рассматривать относительно прямоугольной (декартовой) системы координат, состоящей из трех взаимно перпендикулярных осей (рис. 3.1): ось x — ось абсцисс; ось y — ось ординат; ось z — ось аппликат. Начало координат — точка пересечения осей, обозначается буквой O. Такая система координат образует правую тройку осей: если смотреть навстречу оси z, то поворот оси x к оси y будет против хода часовой стрелки.

Координатная плоскость xOy располагается горизонтально и называется *горизонтальной* плоскостью проекций и ей присваивается индекс «1» — π_1 (Π_1). Проекции всех геометрических объектов на эту плоскость имеют индекс «1» и называются *горизонтальными проекциями*.

Две плоскости, перпендикулярные друг другу и горизонтальной плоскости, называются фронтальной и профильной. Первая плоскость — *фронтальная* xOz — имеет индекс «2» — π_2 (Π_2) и обращена к наблюдателю. Вторая плоскость — *профильная* yOz — имеет индекс «3» — π_3 (Π_3) и находится сбоку от наблюдателя. Индексы «2» и «3» присваиваются всем проекциям геометрических объектов и на-

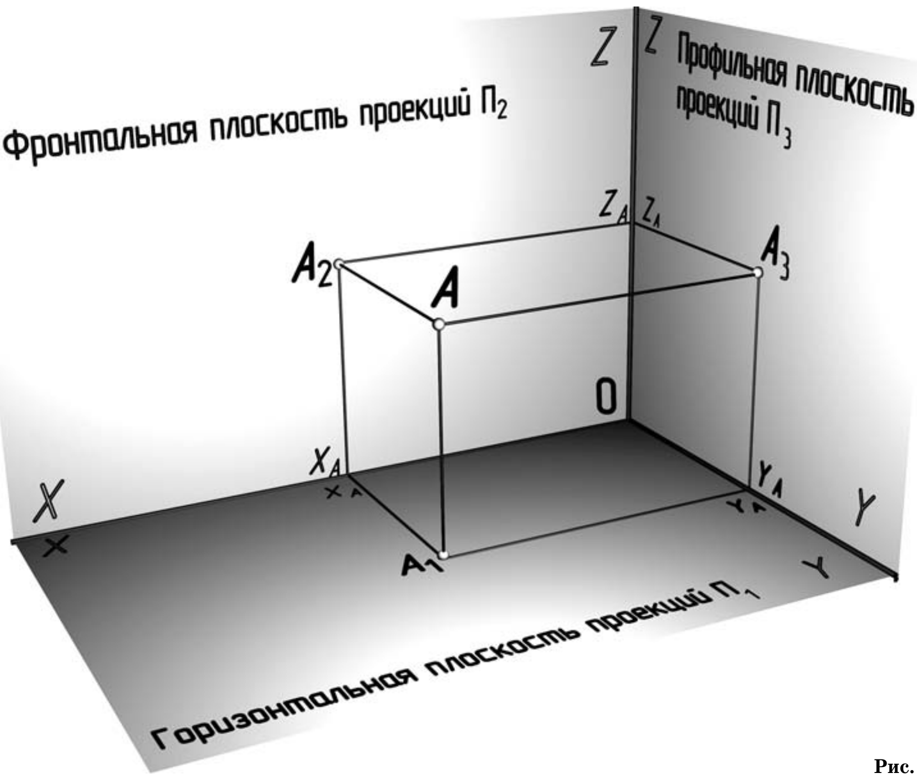


Рис. 3.1

зываются соответственно фронтальными и профильными проекциями того или иного объекта.

Преимуществами ортогонального проецирования перед центральным и косоугольным параллельным являются простота графических построений для определения ортогональных проекций точек и сохранение при определенных положениях геометрических фигур их формы и размеров на проекциях. Это позволило широко применять ортогональное проецирование в технике.

3.2. ПРОЕКЦИИ ТОЧКИ И ЕЕ КООРДИНАТЫ

Представим в пространстве точку A, находящуюся в системе трех взаимно перпендикулярных плоскостей: Π_1, Π_2 и Π_3. Причем плоскость проекций Π_1 — горизонтальная (находится под данной точкой), Π_2 — фронтальная (располагается за точкой), Π_3 — профильная (находится справа) (рис. 3.1).

Проведем из точки A проецирующие лучи (перпендикуляры) к плоскостям проекций Π_1, Π_2 и Π_3 до их пересечения с этими плоскостями. Определим ортогональные проекции данной точки. Так, проекцию A_1 точки A на плоскость Π_1 называют *горизонтальной проекцией*, проекцию A_2 на плоскость Π_2 — *фронтальной проекцией*, проекцию на плоскость Π_3 — *профильной проекцией*.

Прямые линии, связывающие точки пространства с их проекциями, называют *проецирующими линиями* (или *проецирующими лучами*). Прямая AA_1, проецирующая точку A на плоскость проекций Π_1, называется *горизонтально проецирующей* прямой. Отрезок AA_1 этой прямой без искажения проецируется на фронтальную и профильную плоскости проекций. Проецирующие лучи AA_1 и AA_2, исходящие из точки A, образуют плоскость, которая называется *плоскостью проецирующих лучей*, или *проецирующей плоскостью*; она перпендикулярна плоскостям проекций Π_1 и Π_2. Проецирующая плоскость, образованная проецирующими лучами AA_1 и AA_3, перпендикулярна плоскостям проекций Π_1 и Π_3. И наконец, проецирующая плоскость, образованная проецирующими лучами AA_2 и AA_3, перпендикулярна плоскостям проекций Π_2 и Π_3.

Точка A удалена от горизонтальной, фронтальной и профильной плоскостей проекций Π_1, Π_2 и Π_3 на расстояния, равные удалению ее фронтальной, горизонтальной и профильной проекций от соответствующих осей. Эти расстояния будут определяться координатами точки. Координата $x_A=A_x$ определяет расстояние от точки A до профильной плоскости проекций π_3, координата $y_A=A_y$ — расстояние от точки A до плоскости проекций Π_2, координата $z_A=A_z$ — расстояние от точки A до плоскости проекций Π_1. По координатам точек можно судить о положении точек друг относительно друга. Так, чем больше абсцисса точки, тем левее она находится относительно точки с меньшей абсциссой. Чем больше ордината точки, тем ближе она находится относительно точки с меньшей координатой. Наконец, чем выше точка, тем больше будет ее аппликата.

3.3. КОМПЛЕКСНЫЙ ЧЕРТЕЖ ТОЧКИ. ЭПЮР МОНЖА

Пространственный макет для изображения ортогональных проекций геометрических образов, показанный на рисунке 3.1, имеет ряд недостатков, среди которых — искажение формы и размеров проецируемой фигуры на горизонтальной и профильной плоскостях проекций. Кроме того, чертеж получается громоздким и поэтому трудночитаемым.

Чтобы преодолеть указанные недостатки, следует заменить пространственное изображение комплексным чертежом, или эпюром Монжа — чертежом, состоящим из двух и более связанных между собой вполне определенным образом ортогональных проекций геометрической фигуры.

Для получения эпюра из пространственного изображения необходимо повернуть по ходу часовой стрелки на угол 90° вокруг оси Ox горизонтальную плоскость проекций Π_1 (вместе со всеми ее проекциями) (рис. 3.2*а*), до совмещения ее с фронтальной плоскостью проекций Π_2. Профильную плоскость проекций Π_3 повернем вокруг оси Oz также на угол 90° до совмещения с фронтальной плоскостью проекций (рис. 3.2*б*).

Линии, соединяющие две проекции, называются *линиями связи*. Они располагаются перпендикулярно линиям пересечения плоскостей проекций (на рисунке 3.2*б* линии пересечения совпадают с осями координат). По-

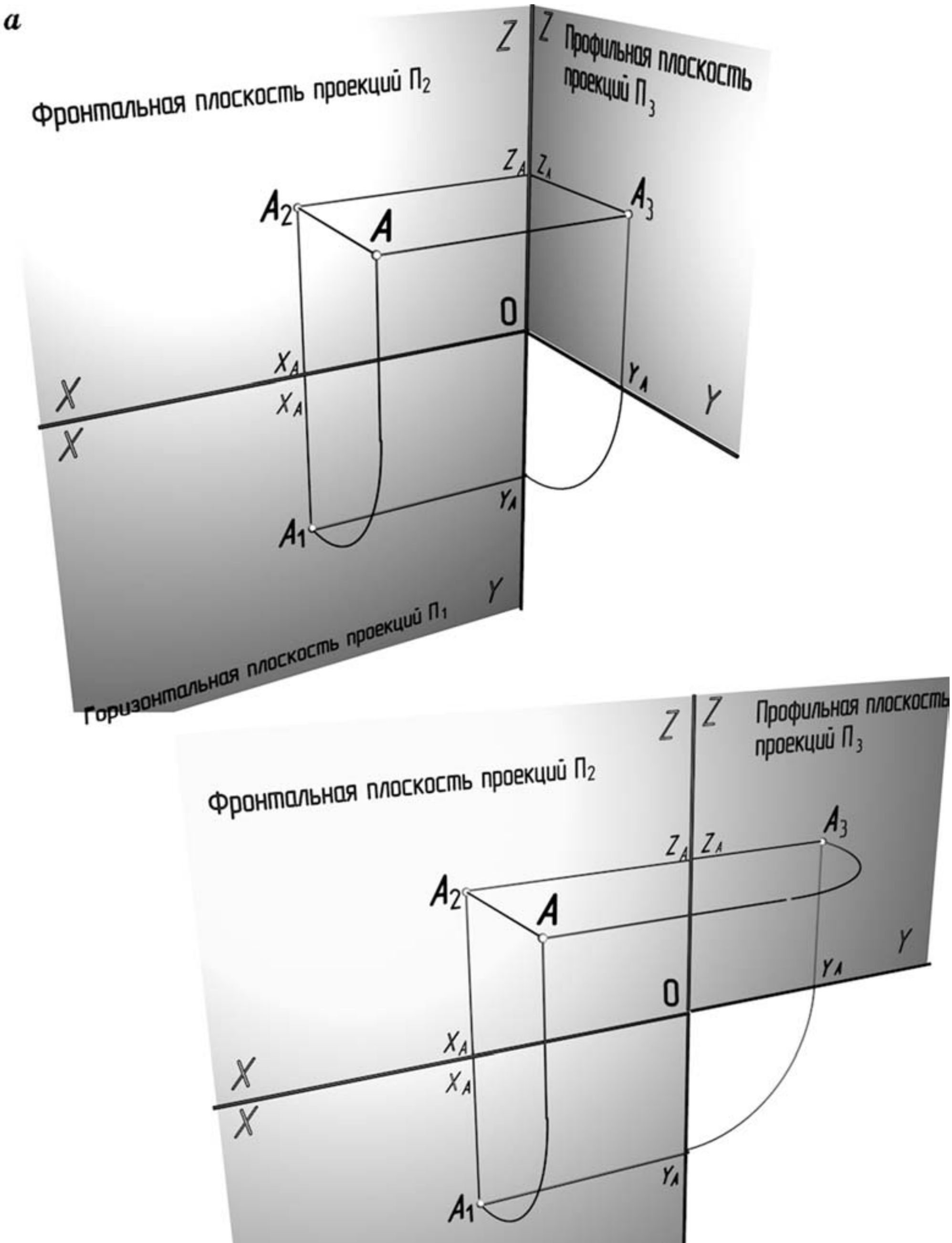

а
Z
Z
Фронтальная плоскость проекций П2
Профильная плоскость проекций П3
Z_A
Z_A
A_2
A
A_3
0
X_A
X_A
X
X
Y_A
Y
Y_A
A_1
Y
Горизонтальная плоскость проекций П1
Z
Z
Фронтальная плоскость проекций П2
Профильная плоскость проекций П3
Z_A
Z_A
A_3
A_2
A
Y
Y_A
0
X_A
X_A
X
X
Y_A
A_1
Y
Горизонтальная плоскость проекций П1
б

Рис. 3.2

нятие *линии связи* является одним из основных понятий, эти линии изображаются в виде отрезков, соединяющих проекцию точек.

Необходимо отметить, что по расположению линий связи можно судить о правильности построения чертежа. Таким образом, получаем комплексный чертеж точки, или эпюр, показанный на рисунке 3.3.

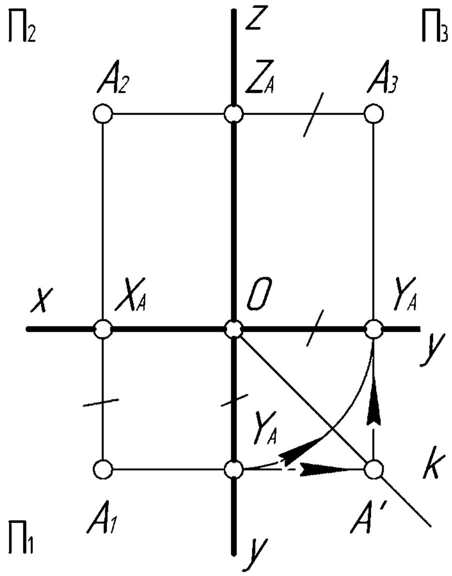


Рис. 3.3

На рисунке 3.3 комплексный чертеж точки показан для трех ее проекций. Для решения задач обычно бывает достаточно двух — горизонтальной и фронтальной. Связь между горизонтальной и фронтальной проекциями показана вертикальной линией связи, а между профильной и фронтальной — горизонтальной линией связи. Между горизонтальной и профильной проекциями связь осуществляется посредством ломаной линии $A_1A'A_3$ с вершиной A' на биссектрисе угла, образованного осями y, принадлежащими плоскостям $П_1$ и $П_3$.

Биссектрису OA' называют постоянной прямой k эпюра Монжа. Нетрудно догадаться, что эта прямая будет диагональю квадрата, образующей угол 45° с его сторонами.

Связь между горизонтальной и профильной проекциями можно осуществлять при помощи двух ортогональных отрезков $[A_1Y_A]$, $[A_3Y_A]$ и с помощью сопрягающей их дуги окружности с центром в точке O пересечения осей x, y, z.

Рассмотренная связь между двумя проекциями позволяет строить третью проекции по двум известным.

Пример 1

Задание: по наглядному изображению точек A, B и C (рис. 3.4*а*) определить их координаты, показать три проекции и построить комплексный чертеж точек (рис. 3.4*б*). Учесть, что точка A находится в первом квадранте

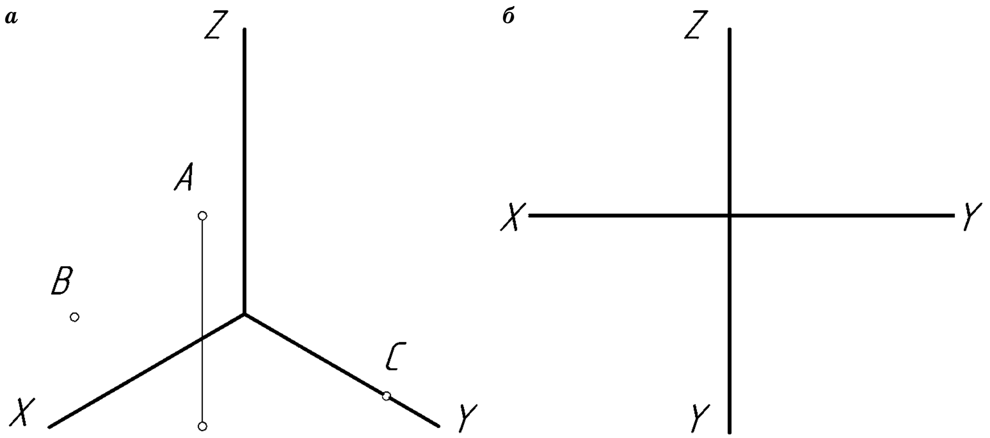


Рис. 3.4

($X_A > 0$, $Y_A > 0$, $Z_A > 0$), точка B расположена на фронтальной плоскости проекций ($Y_B = 0$) и точка C находится на профильной и горизонтальной плоскостях проекций ($X_C = 0$, $Z_C = 0$).

Решение: на наглядном изображении (рис. 3.5*а*) для каждой точки проводим линии, параллельные координатным осям, и находим проекции точек на плоскостях проекций. Получаем изображения координат точки: на *горизонтальной плоскости проекций* Π_1 — X и Y; *фронтальной плоскости проекций* Π_2 — X и Z; *профильной плоскости проекций* Π_3 — Y и Z. Для точки A строим параллелепипед и показываем три проекции точки. Точка B находится на фронтальной плоскости проекций, а это значит, что $Y_B = 0$. Тогда горизонтальная проекция точки будет на оси x, а профильная — на оси z. Так как точка C расположена на горизонтальной и профильной плоскостях проекций, то она принадлежит линии пересечения этих плоскостей, т. е. расположена на оси y. Горизонтальная и профильная проекции точки располагаются там же. Фронтальная проекция точки C лежит в начале координат, поскольку $X_C = Z_C = 0$ (рис. 3.5*а*).

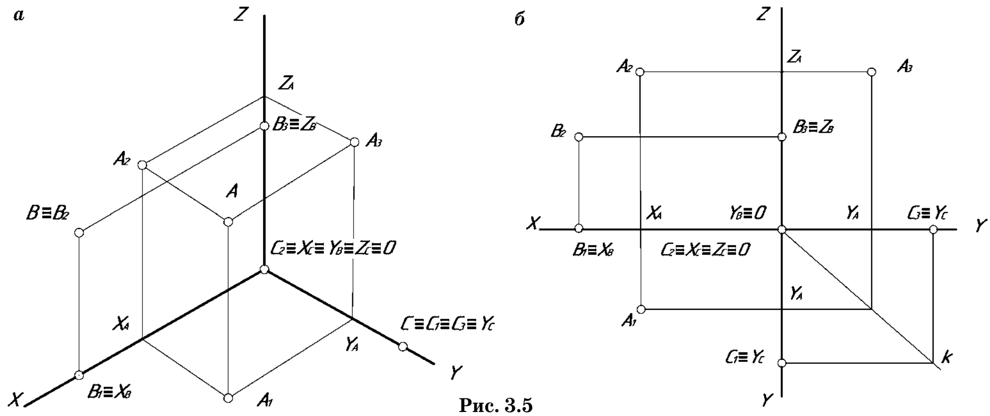


Рис. 3.5

На наглядном изображении (рис. 3.5*а*) показываем координаты точек и измеряем их значения. Откладываем соответствующие координаты на *комплексном чертеже* (рис. 3.5*б*).

Комплексный чертеж точки, приведенный на рисунке 3.3, имеет недостаток: при отрицательных координатах проекции точек попадают на соседнюю плоскость проекций. Так, на рисунке 3.6*а* показано наглядное изображение двух точек: точки A, расположенной перед фронтальной плоскостью проекций и точки B — за фронтальной плоскостью проекций, а на рисунке 3.6*б* — изображение, получающееся при совмещении плоскостей проекций.

Из рисунка 3.6*б* видно, что горизонтальная и профильная проекции точки B расположены на фронтальной плоскости проекций. В данном случае точка B имеет отрицательную координату y.

Подобную ситуацию мы наблюдаем на эпюре, представленном на рисунке 3.7. Расположение проекций точки C не вызывает трудностей при чтении чертежа. Однако у точки B (имеющей отрицательные координаты x и y) произошло наложение плоскостей проекций одна на другую. Для точки A горизонтальная и фронтальная проекции совпали, а для точки D, имеющей отрицательное значение x и z, совпали все три проекции. В результате получаем неудобный для решения задач начертательной геометрии чертеж.

На технических чертежах подобного рода наложения изображений делают чертеж вообще не пригодным для чтения. Возникает необходимость простановки размеров и нанесения надписей между изображениями.

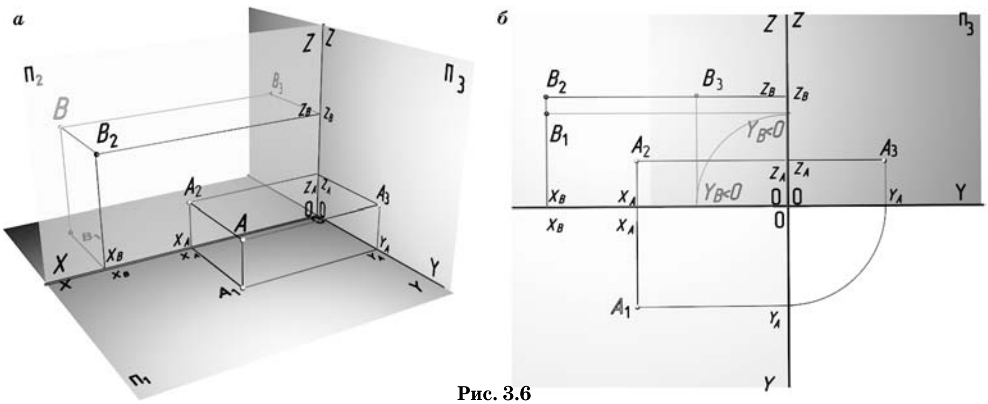


Рис. 3.6

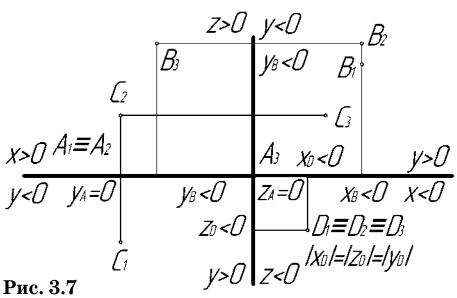


Рис. 3.7

Данный недостаток устраним следующим образом. Сместим плоскости проекций: горизонтальную проекцию вместе с осями координат опустим вниз, а профильную — переместим вправо. При таком преобразовании на всех плоскостях проекций положение между проекциями точек не изменилось (рис. 3.8).

Положение системы координат не влияет на относительное положение проекций точек, поэтому на рисунке 3.9 система координат не показана. Если возникает необходимость использования системы координат, то она выбирается произвольно (исходя из соображений удобства и упрощения решения задач). На этом же рисунке линии связи показаны в виде штрихов.

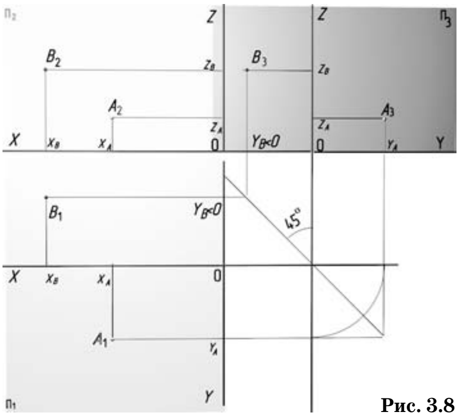


Рис. 3.8

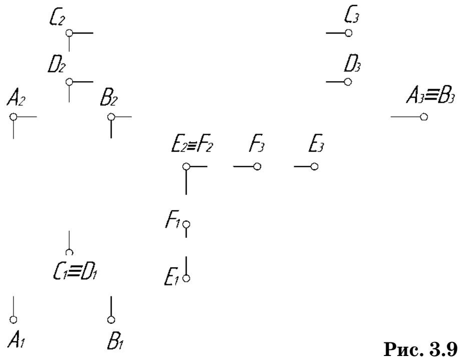


Рис. 3.9

На технических чертежах линии связи вообще не показывают, чтобы не загромождать чертеж лишними изображениями. Линии связи либо подразумевают, либо сначала чертят тонкие линии, а затем их убирают. При этом говорят о наличии проекционной связи.

Положение наивысшей точки можно определить по ее координатам: наибольшая аппликата (z) будет характеризовать наивысшую точку, а наименьшая — низшую точку. На комплексном чертеже такая точка определяется по фронтальной или профильной проекциям.

Самая правая точка имеет наименьшую абсциссу, а самая левая — наибольшую координату x. На комплексном чертеже находим по горизонтальной или фронтальной проекциям самую правую и самую левую точки.

Ближайшая точка определяется по максимальному значению ординаты, а наиболее удаленная — по наименьшему ее значению. Для определения ближайшей и наиболее удаленной точек необходимо воспользоваться горизонтальной или профильной проекциями. Проекция ближайшей точки располагается на горизонтальной проекции ниже всех проекций, а на профильной — правее всех. Наиболее удаленная точка — наоборот.

Пример 2

Задание: даны точки: A (30, 20, 10), B (40, –25, 50), C (10, 50, 0), D (0, 0, 0). Определить (по значениям координат) правую, левую, высшую, низшую, ближайшую и наиболее удаленную точки.

Решение:
правая — D, так как ее координата x наименьшая;
левая — B, так как ее координата x наибольшая;
высшая — B, так как ее координата z наибольшая;
низшие — C, D, так как их координата z наименьшая;
ближайшая — C, так как ее координата y наибольшая;
наиболее удаленная — B, так как ее координата y наименьшая.

Пример 3

Задание: определить положение точек друг относительно друга на рисунке 3.9.

Решение: по фронтальной или профильной проекциям определяем, что самая высшая точка — C, а низшие точки — E и F.

На горизонтальной или фронтальной проекции определяем, что самые правые точки E и F, а левая — точка A.

Ближайшие точки определяем по самым низшим проекциям на горизонтальной плоскости проекций или на профильной проекции — самые правые проекции точек A и B. Наиболее удаленная точка на горизонтальной проекции будет точка, проекция которой располагается выше всех горизонтальных проекций, или точка, проекция которой на профильной плоскости проекций будет самой левой — точка F.

Построение третьей проекции точки по двум известным проекциям становится возможным двумя способами, если учесть, что две проекции точки всегда характеризуются тремя координатами: x, y и z.

Аналитический способ — определение координаты точки по двум известным проекциям; по известным координатам точки надо построить третью проекцию.

Графический способ решения рассмотрен ниже — на примере 4.

Пример 4

Задание: построить третью проекцию точек A и B по двум из известных проекций (рис. 3.10*а*).

Решение: на рисунке 3.10*б* показано построение профильных проекций точек на A и B. Первоначально определяем положение профильных проекций друг относительно друга. Так как точка A ближе точки B (на горизонтальной плоскости проекций проекция точки A ниже точки B), то

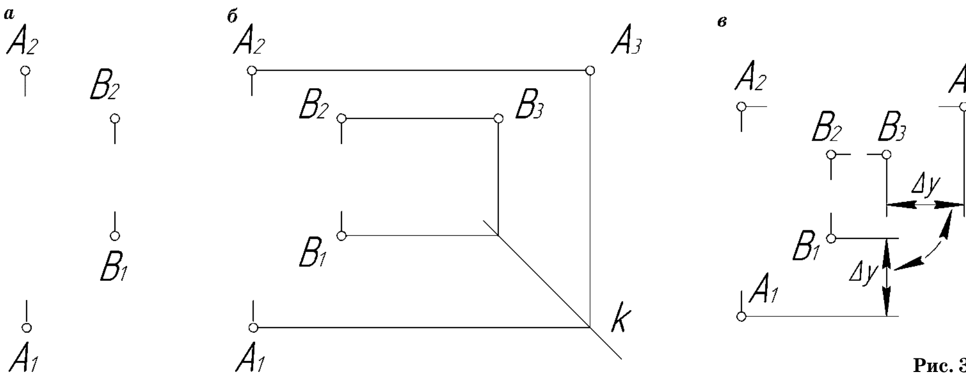


Рис. 3.10

профильная проекция первой точки будет правее второй. Поэтому построение начинаем с профильной проекции B_3 (располагаем на линии связи B_2 — B_3 на свободном месте чертежа). Построим ломаную линию B_1B_3, проведя вертикальную линию из точки B_3 и горизонтальную линию из точки B_1. Через вершину ломаной линии проводим постоянную прямую k под углом 45°. С ее помощью определяем положение профильной проекции точки A.

Другой способ построения третьей проекции по двум известным показан на рисунке 3.10*в*. Как и ранее, сначала показываем профильную проекцию точки B_3. Далее откладываем разность ординат точек A и B ($\Delta y = |y_A - y_B|$) вдоль линии связи A_2 — A_3. Рисунок 3.10*в* отличается от рисунка 3.10*б*, что не является принципиальным различием комплексных чертежей.

3.4. КОНКУРИРУЮЩИЕ ТОЧКИ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИХ ВИДИМОСТИ

Точки, у которых одна из проекций совпадает (две одинаковые координаты), называются *конкурирующими*. Плоскость проекций, на которой проекции совпадают, дает название этим точкам (*горизонтально*, *вертикально* и *профильно конкурирующие точки*) (рис. 3.11, 3.12).

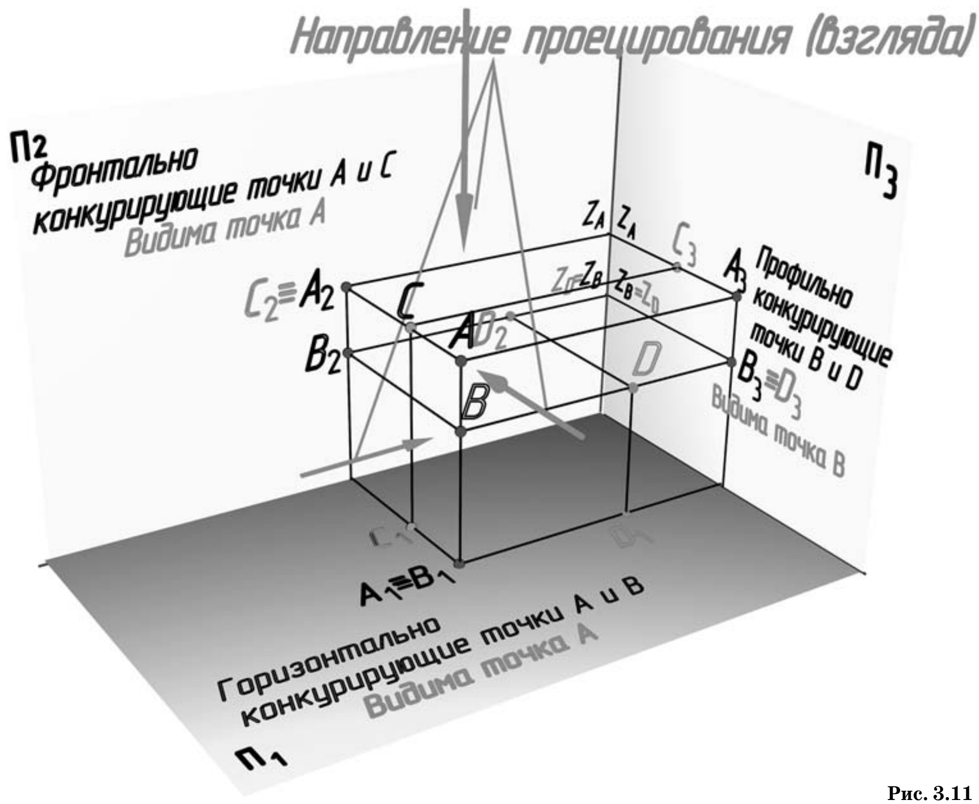


Рис. 3.11

Видимость точек определяем по направлению проецирования (взгляда, направленного в сторону, противоположную положительному отсчету координатных осей, на рисунках 3.11, 3.12 — стрелка):

- для горизонтально конкурирующих точек направление проецирования — сверху вниз на фронтальной и профильной плоскостях проекций;
- для фронтально конкурирующих точек — снизу вверх на горизонтальной плоскости проекций, справа налево — на профильной плоскости проекций;
- для профильно конкурирующих — слева направо на горизонтальной и фронтальной плоскостях проекций.

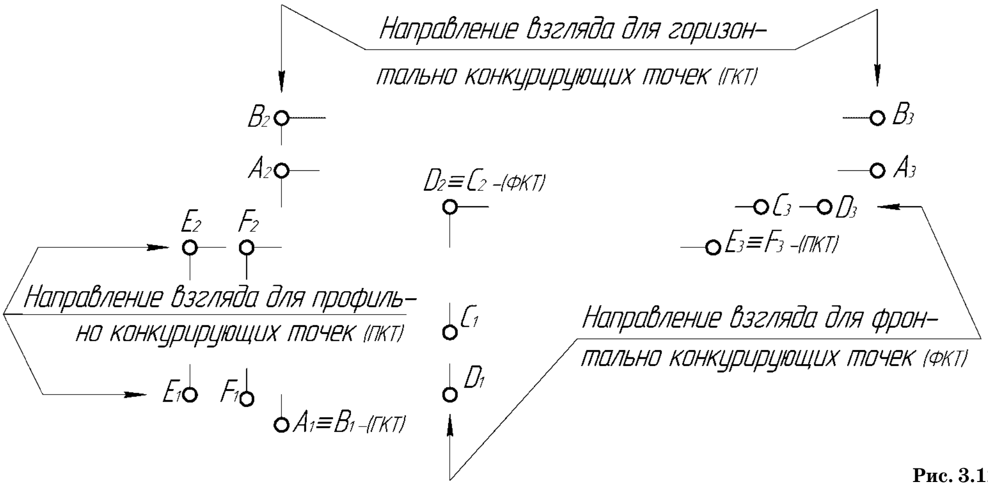


Рис. 3.12

При символьном обозначении видимости сначала указывается проекция видимой точки, а затем в круглых скобках — невидимой. Например, $A_1(B_1)$ — горизонтально конкурирующие точки, из которых точка A видна. Для чертежа на рисунке 3.12:

- $D_2(C_2)$ — фронтально конкурирующие;
- $B_1(A_1)$ — горизонтально конкурирующие;
- $E_3(F_3)$ — профильно конкурирующие.

Умение различать конкурирующие точки и определять их видимость очень важно при решении позиционных задач по определению положения геометрических объектов друг относительно друга. Выбираются конкурирующие точки, принадлежащие различным геометрическим объектам, затем определяется видимость проекций точек, на основании чего делается вывод о видимости проекций собственно геометрических объектов.

Пример 5

Задание: показать на комплексном чертеже точки A (30, 9, 10), B и C (19, –10, 18). Учесть, что точка B фронтально конкурирует с точкой A и не видна. Причем последняя левее точки C на 11 мм, ниже на 8 мм и ближе на 19 мм. Расстояние между точками A и B равно 9 мм.

Решение: для того чтобы начать построение, необходимо определить габариты чертежа — высоту и ширину. Для размера высоты необходимо учесть координаты Z и Y (рис. 3.6). Максимальная аппликата будет у точки $C - Z_C = 18$ мм. Учитывая максимальную ординату у точки $A - Y_A = 9$ мм и то, что ордината точки B меньше, так как она располагается дальше, чем точка A, получим минимальный габаритный размер чертежа по высоте: $Z_C + Y_A = 27$ мм. Допустим, что высота листа больше, чем полученный минимальный размер. Тогда построение можно начинать либо с фронтальной проекции точки C (наивысшая точка), либо с горизонтальной проекции точки A. Учитывая, что точка A самая левая точка, приходим к выводу, что построение удобнее начинать именно с этой точки, так как на чертеже она будет самая левая и нижняя.

На рисунке 3.13 начало координат для каждой плоскости проекций не показано, но следует учесть, что здесь начала координат для каждой плоскости проекций не совпадают, т. е. фронтальная плоскость проекций смещена по вертикали, а профильная — по горизонтали.

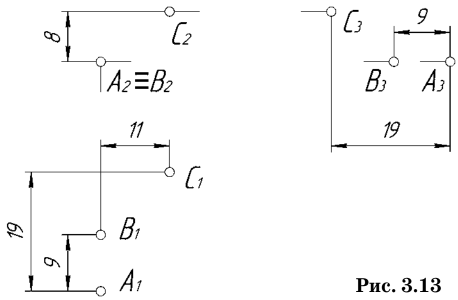


Рис. 3.13

Построение горизонтальных проекций точек выполним в следующей последовательности. Обозначим положение проекции точки A — A_1 (рис. 3.13). Показываем вертикальную линию связи. Так как точки A и B фронтально конкурирующие, то они имеют одинаковые координаты Z и X, а значит, располагаются на одной вертикальной линии связи. Учитывая, что точки имеют одинаковую высоту (одинаковая аппликата), расстояние между этим точками будет равно разности ординат $-\Delta Y = 9$ мм. Выше на 9 мм проекции точки A показываем проекцию точки B — B_1. Проекция точки C выше проекции точки A на

$$\Delta Y = Y_A - Y_C = 9 - (-10) = 19 \text{ мм}$$

и правее на

$$\Delta X = X_A - X_C = 30 - 19 = 11 \text{ мм},$$

что и показываем на чертеже.

При построении фронтальных проекций точек будем исходить из того, что на фронтальной плоскости проекций самой низшей точкой будет точка A, и построение начинаем именно с этой точки. На вертикальной линии связи этой точки произвольно, учитывая габариты по высоте и размер поля чертежа, показываем положение проекций точек A и B (фронтально конкурирующие точки — проекции совпали). На вертикальной линии связи проекции точки C выше проекции точки A_2 на расстоянии

$$\Delta Z = Z_C - Z_A = 18 - 10 = 8 \text{ мм}$$

показываем фронтальную проекцию точки C — C_2.

Для построения профильных проекций точек проводим горизонтальные линии связи. Начинаем построение с самой дальней точки, так как на профильной проекции самая левая проекция будет у той точки, которая находится дальше всех. Для нашей задачи (определяем по горизонтальной проекции) это будет точка C. На ее горизонтальной линии связи показываем проекцию точки C — C_3. При этом необходимо учесть, что чертеж будет правее — на расстоянии от самой ближней до самой дальней точки чертежа. В нашем случае — $\Delta Y = Y_A - Y_C = 19$ мм. На горизонтальной линии связи точек A и B правее профильной проекции точки C откладываем это расстояние и показываем проекцию точки A — A_3. На этой же линии связи левее проекции точки A_3 (так как точка A ближе точки C) откладываем 9 мм и отмечаем проекцию точки B — B_3.

Следует отметить, что при решении задачи система координат не показывалась, так как в этом отсутствует необходимость.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Что такое ортогональное проецирование точки? Назвать основные плоскости проекций (наименование и расположение в пространстве).
2. Как обозначаются проекции точки на три основные плоскости проекций?
3. Что такое линии связи, каково их расположение по отношению к линии пересечения плоскостей проекций (координатным осям)?
4. Как определить по комплексному чертежу и координатам точек их взаимное расположение в пространстве?
5. Дать определение конкурирующих точек, как определить видимости их проекций?
6. Какими способами выполняется построение третьей проекции точки по двум известным?

4 АКСОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ

4.1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ И ПОНЯТИЯ

При выполнении технических чертежей в ряде случаев оказывается, что наряду с изображением предметов в прямоугольных проекциях следует иметь и наглядные изображения. Это необходимо для обеспечения возможности более полно выявить конструктивные решения, заложенные в изображаемом предмете, правильно представить положение его в пространстве, оценить пропорции частей и их размеры.

Наглядные изображения на некоторых чертежах могут располагаться и независимо от прямоугольных изображений, например при изображении схем электроснабжения и теплоснабжения, вентиляции зданий и сооружений и т. п.

Существуют различные способы построения наглядных изображений. Сюда относятся аксонометрические аффинные и векторные проекции, а также линейная перспектива.

Аксонометрические проекции выполняют в соответствии с требованиями ГОСТ 2.317-2011. При построении аксонометрических проекций объект относят к прямоугольной декартовой системе координат и проецируют его вместе с осями координат пучком параллельных лучей (прямоугольным или косоугольным способом) на некоторую плоскость проекций, называемую аксонометрической. Полученное изображение, нанесенное на некоторую плоскость проекций, называют аксонометрическим (или просто аксонометрией), а проекции координатных осей — аксонометрическими осями координат.

Проекции прямых, параллельных в действительности натуральным осям координат, параллельны соответствующим аксонометрическим осям. Именно в использовании этого свойства параллельных проекций и заключается простота построения параллельной аксонометрии.

Различают три случая, когда все три оси координат составляют с аксонометрической плоскостью проекций некоторые острые углы (равные или неравные) и когда одна или две оси параллельны этой плоскости. В первом случае применяется только прямоугольное проецирование (прямоугольная или ортогональная аксонометрия), а во втором и третьем — только косоугольное проецирование (косоугольная аксонометрия). На практике используют несколько видов как прямоугольной, так и косоугольной аксонометрии с наиболее простыми соотношениями между показателями искажений.

Обратимость аксонометрического чертежа (возможность определения натуральных размеров изображенного объекта) обеспечивается указанием на нем показателей искажения (или наличием условий для их определения) и возможность построения аксонометрической координатной ломаной любой точки поверхности, принадлежащей изображенному объекту.

Разрезы на аксонометрических проекциях выполняют, как правило, путем сечения объекта координатными плоскостями. При этом ребра жесткости, спицы колес и другие тонкостенные элементы штрихуют (рис. 4.1).

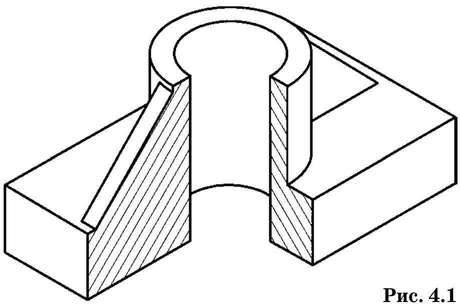


Рис. 4.1

ГОСТ 2.317-2011 рекомендует к применению на чертежах всех отраслей промышленности и строительства пять видов аксонометрий: две ортогональных (прямоугольных) — изометрическую и диметрическую — и три косоугольных — фронтальную и горизонтальную изометрические и фронтальную диметрическую. В машиностроении в основном применяют ортогональные: изометрическую (она является единственно возможной) и диметрическую проекции.

Прямоугольные аксонометрические проекции, как изометрическая, так и диметрическая, дают более наглядные изображения и в связи с этим применяются на практике наиболее часто.

4.2. ПРЯМОУГОЛЬНАЯ ИЗОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОЕКЦИЯ

Углы между осями x, y и z равны между собой, линейные размеры предмета, параллельные этим осям, искажаются одинаково (рис. 4.2).

При построении аксонометрии дробные показатели искажений усложняют расчет размеров. Для его упрощения пользуются *приведенными показателями искажений*: в изометрии все три показателя увеличивают в 1,22 раза ($1:0{,}82 \approx 1{,}22$), получая 1. Так, длина всех ребер куба на изображении

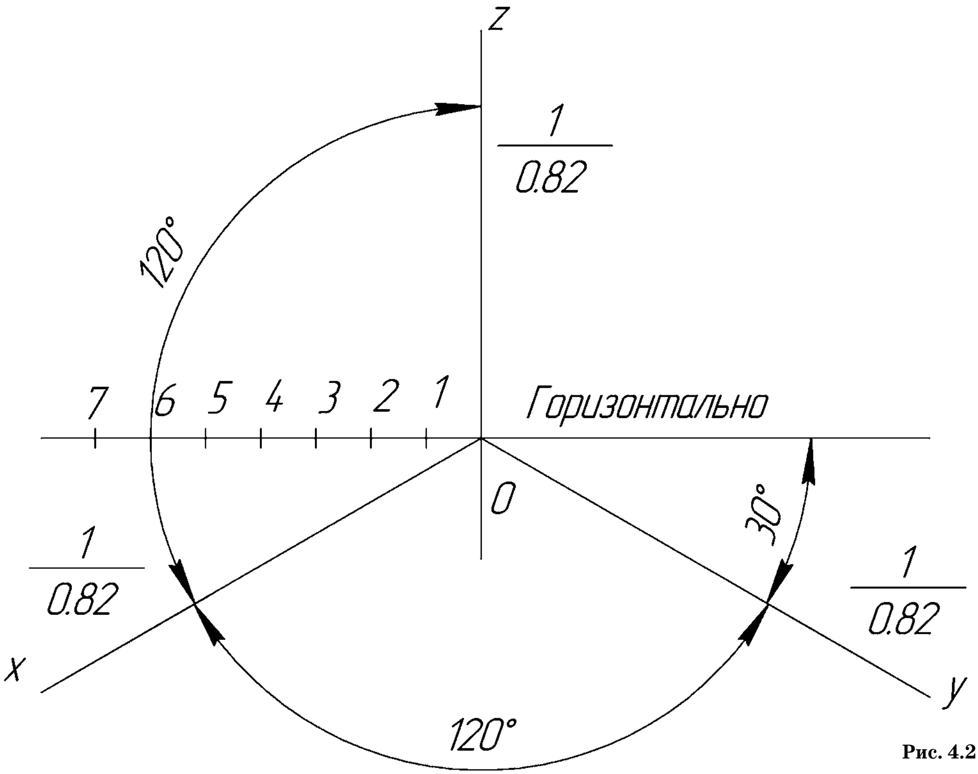


Рис. 4.2

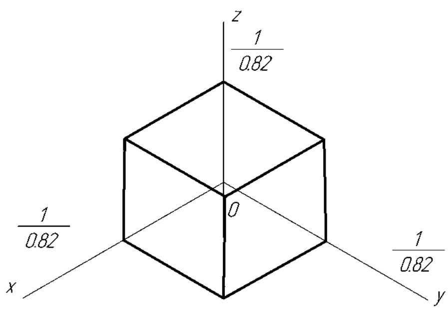
одинаковая (рис. 4.3), равная 0,82 действительной длины. Для упрощения построений (как сказано выше) отрезки, параллельные аксонометрическим осям, откладываются действительной длины, без искажения.

Известно, что любая линия или поверхность есть множество точек, поэтому рассмотрение построения изометрической проекции рационально начать с построения точки.

Точка A задана своими проекциями A_1, A_2 и A_3 (рис. 4.4) с координатами x, y, z.

Построение изометрической проекции точки (рис. 4.5). Сначала строим оси, как показано на рисунке 4.2. Откладывая от точки O (начала ко-

Рис. 4.3



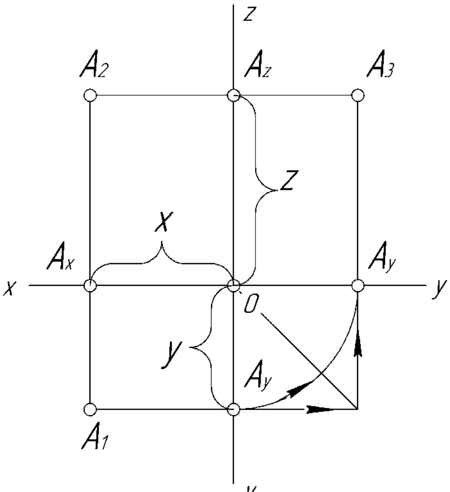


Рис. 4.4

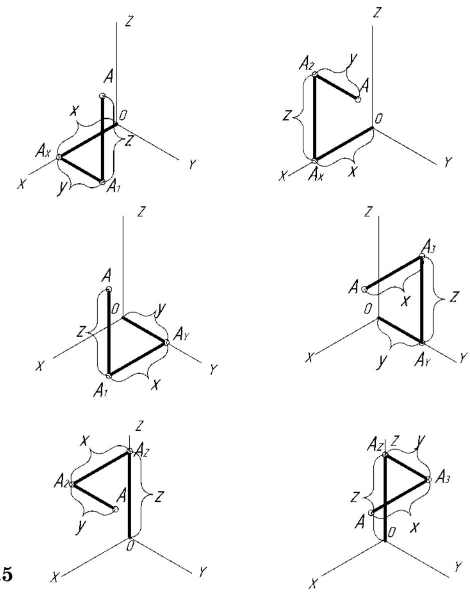


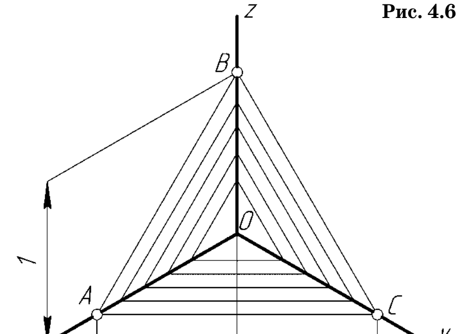
Рис. 4.5

ординат) последовательно отрезки на одной из осей и параллельные двум другим осям, равные величинам координат, мы всегда придем в точку A. Порядок построения координатной ломаной может быть любым из шести, представленных на рисунке 4.5.

Коэффициент искажения в изометрии $K_x0 = K_y0 = K_z0 = 1{:}0{,}82 \approx 1{,}22$ принимаем равным *единице* ($K_x0 = K_y0 = K_z0 = 1$), поэтому координаты точки A на каждом примере (рис. 4.5) откладываем равными действительным координатам x, y, z (рис. 4.4).

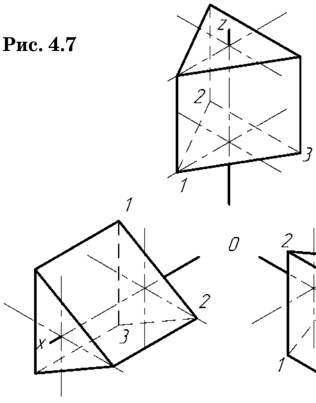
Линии штриховки сечений наносят параллельно одной из диагоналей проекций квадратов, лежащих в соответствующих координатных плоскостях, стороны которых параллельны аксонометрическим осям («спроецированная» штриховка) (рис. 4.6).

Рис. 4.6



Если основание тела — правильный многоугольник (например, треугольник), то построенные прямоугольные изометрические проекции тела, ограниченного плоскостями, выполняют просто, а именно: построение вершин основания по координатам упрощается, если провести одну из осей координат через центр основания (рис. 4.7).

Рис. 4.7



Построив изометрию основания призмы, из вершин треугольника основания проводим прямые, параллельные соответственно осям x, y или z. На этих прямых от вершин основания отложим высоту призмы и получим изометрию вершин другого основания призмы. Соединив эти точки прямыми, получим изометрическую проекцию призмы.

Прямоугольная изометрическая проекция окружности. Если построить изометрическую проекцию куба, в грани которого вписаны окружности диаметра D (рис. 4.8*а*), то квадратные грани куба будут изображаться в виде

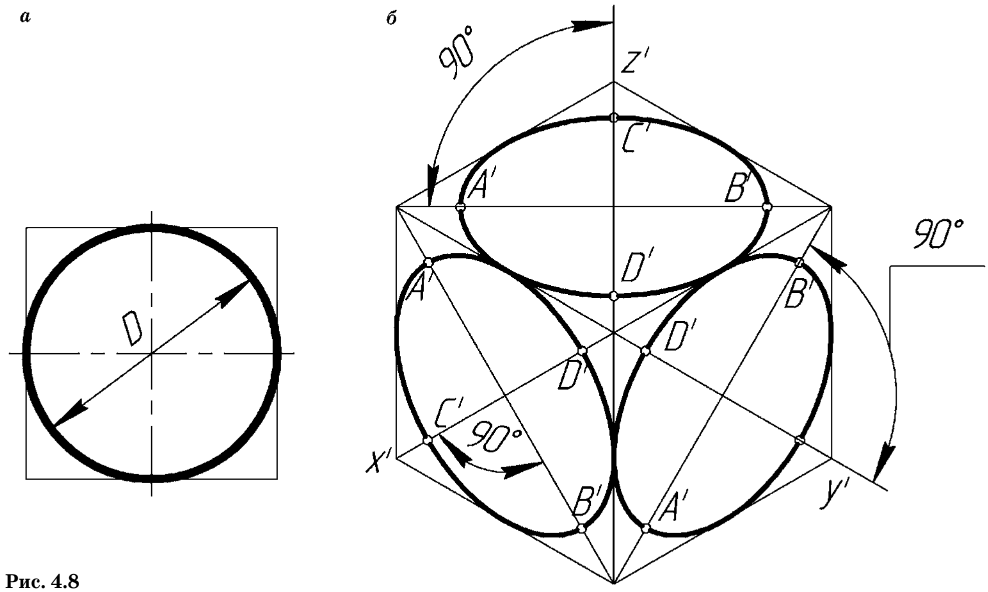


Рис. 4.8

ромбов, а окружности — в виде эллипсов (рис. 4.8*б*). Малая ось $C'D'$ каждого эллипса всегда должна быть перпендикулярна большой оси $A'B'$.

Если окружность расположена в плоскости, параллельной горизонтальной плоскости, то большая ось $A'B'$ должна быть горизонтальной, а малая ось $C'D'$ — вертикальной (рис. 4.8*б*). Если окружность расположена в плоскости, параллельной фронтальной плоскости, то большая ось эллипса должна быть проведена под углом 90° к оси y'.

При расположении окружности в плоскости, параллельной профильной плоскости, большая ось эллипса располагается под углом 90° к оси x'.

Большие оси эллипсов всегда перпендикулярны соответствующим осям, а малые — им параллельны.

При построении изометрической проекции окружности без сокращения по осям x', y' и z' длина большой оси эллипса берется равной 1,22 диаметра D изображаемой окружности, а длина малой оси эллипса — 0,71D (рис. 4.9).

На рисунках 4.10, 4.12 и 4.14 показаны поверхности вращения, выполненные в изометрии с овалами, расположенными параллельно горизон-

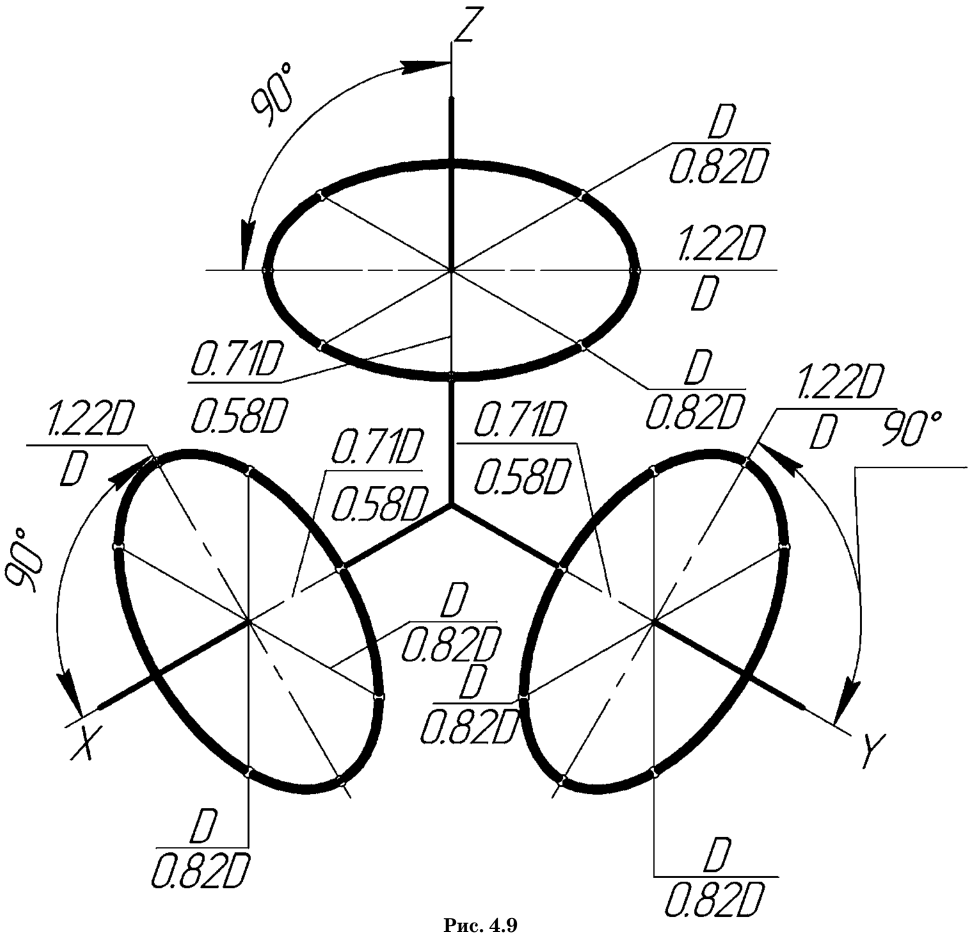


Рис. 4.9

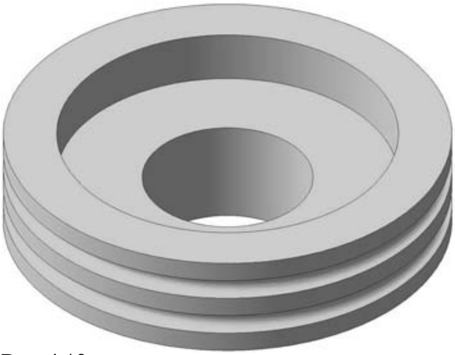


Рис. 4.10

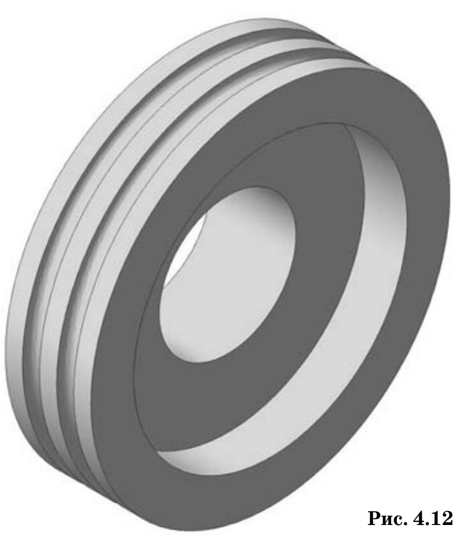


Рис. 4.12

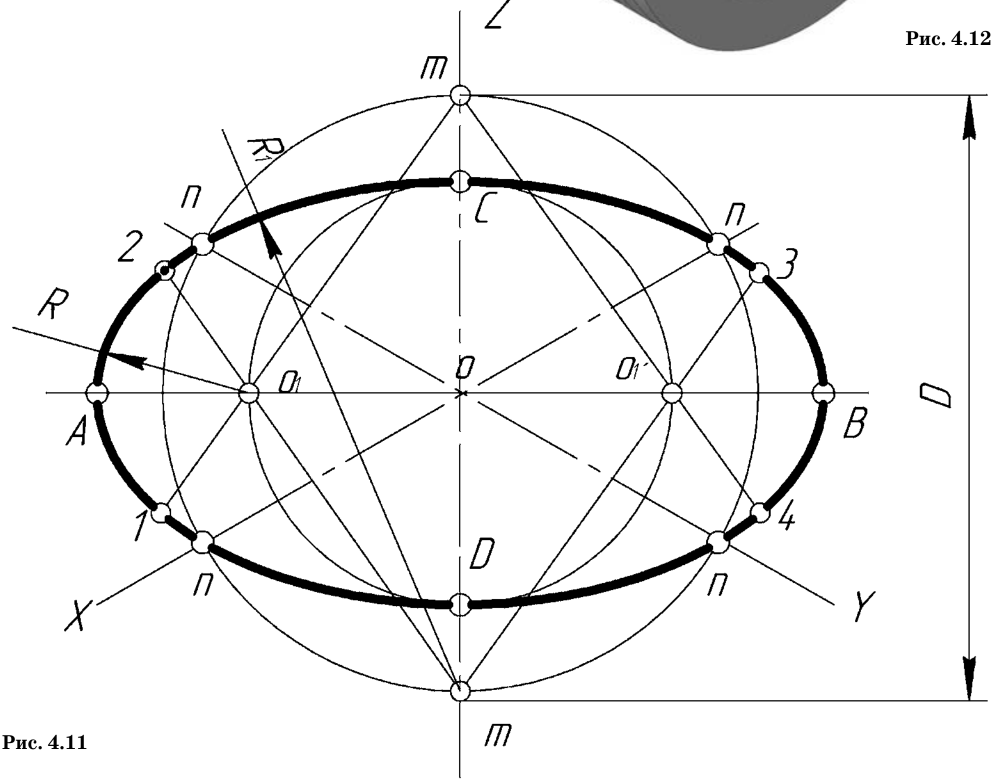


Рис. 4.11

тальной плоскости проекций (рис. 4.10), фронтальной плоскости проекций (рис. 4.12), профильной плоскости проекций (рис. 4.14).

В учебных чертежах для упрощения построения изометрических проекций окружности вместо эллипсов рекомендуется применять овалы, очерченные дугами окружностей. Упрощенный способ построения *изометрических овалов* приведен на рисунках 4.11, 4.13, 4.15.

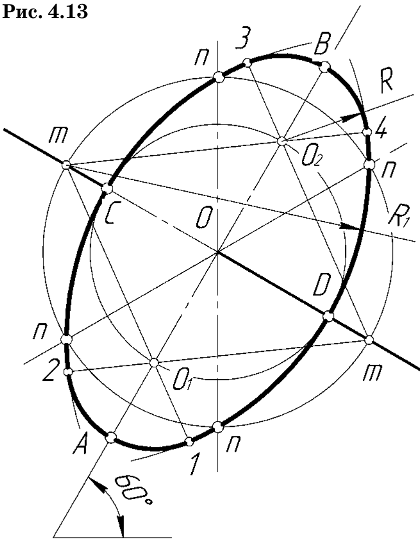


Рис. 4.13

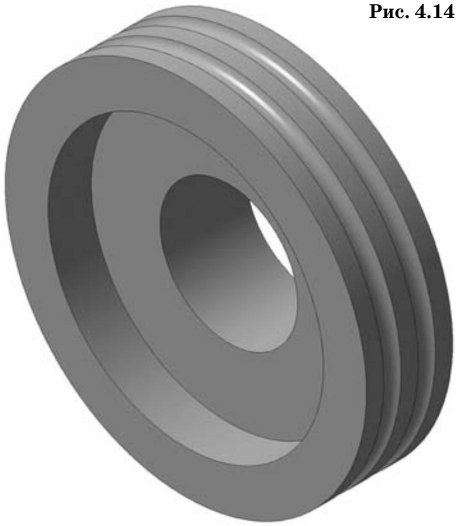


Рис. 4.14

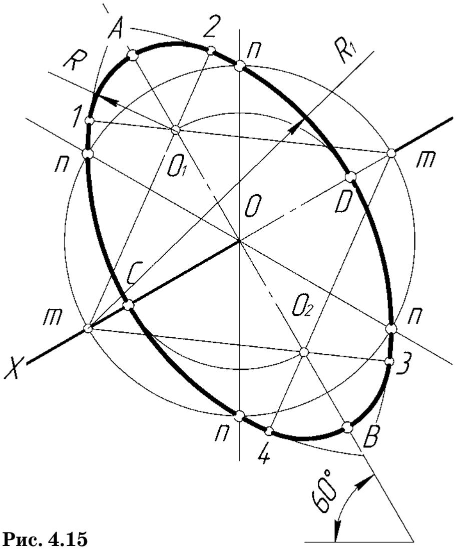


Рис. 4.15

Для построения овала в плоскости, параллельной горизонтальной плоскости проекций (рис. 4.11), проводим оси x и y (рис. 4.2), соответствующие вертикальной и горизонтальной осям плоскости.

Из точки пересечения осей O проводим вспомогательную окружность диаметром D, равным действительной величине диаметра изображаемой окружности, и находим точки n — точки пересечения этой окружности с аксонометрическими осями x и у. Из точек m пересечения вспомогательной окружности с осью z, как из центров, радиусом $R_1 = nm$, проводим две дуги — nDn и nCn окружности, принадлежащие овалу.

Из центра O радиусом OC, равным половине малой оси овала, выполняем окружность и находим на большой оси овала AB точки O_1. Из этих точек радиусом $R=O_1 1=O_1 2=O_1 3=O_1 4$ проводим две дуги. Точки *1*, *2*, *3* и *4* сопряжений дуг радиусов R и R_1 находим, соединяя точки m с точками O_1 и продолжая прямые до пересечения с дугами nCn и nDn.

На рисунке 4.13 показано упрощенное построение изометрической проекции окружности, расположенной в плоскости, параллельной фронтальной плоскости проекций. Построение аналогично построению изометрического овала окружности, расположенной в плоскости, параллельной горизонтальной плоскости проекций, — разница лишь в том, что большую ось овала AB располагают перпендикулярно малой оси CD, принадлежащей оси y.

На рисунке 4.15 показано упрощенное построение изометрической проекции окружности, расположенной в плоскости, параллельной профильной плоскости проекций. Построение аналогично построению изометрического овала окружности, расположенной в плоскости, параллельной профильной плоскости проекций, — разница лишь в том, что большую ось овала AB располагают перпендикулярно малой оси CD, принадлежащей оси x.

На рисунке 4.16 приведен пример построения овалов на изометрии детали с расположением окружностей в плоскостях, параллельных горизонтальной, фронтальной и профильной плоскостям проекций.

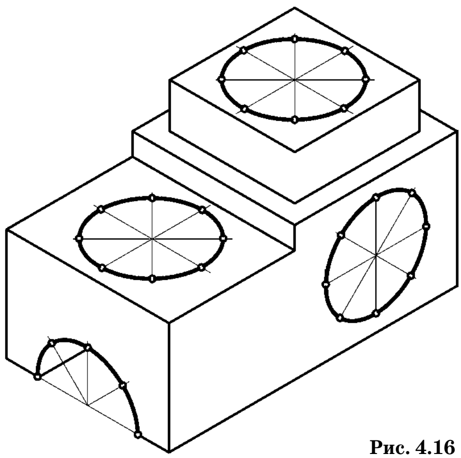


Рис. 4.16

Построение аксонометрической проекции детали следует начинать с изображения на чертеже аксонометрических осей. Целесообразно за начало координат принимать центр симметрии, а за оси координат — оси симметрии детали.

При построении аксонометрии рекомендуется мысленно разделить деталь на простейшие геометрические тела (цилиндр, конус, призма, пирамида и т. п.). После изображения аксонометрических проекций составных элементов предмета строятся конструктивные скругления в местах их соединения.

Линии, изображающие проекции ребер предмета, параллельны одноименным аксонометрическим осям, поэтому при построении аксонометрических проекций удобно использовать прямые, параллельные аксонометрическим осям.

Как и на комплексном чертеже, полые детали в аксонометрии рекомендуется выполнять с разрезом (вырезом части) (рис. 4.17).

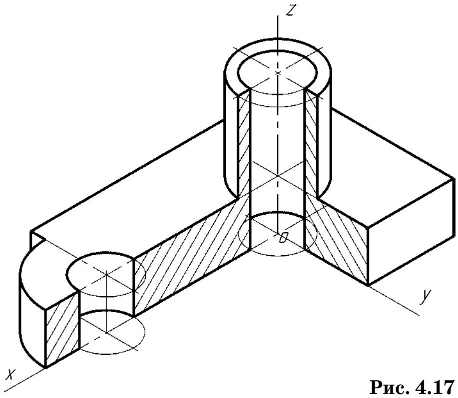


Рис. 4.17

Если окружность неполная, то для ее изображения вычерчивают тонкой линией полный овал или эллипс, а затем обводят нужную часть овала (рис. 4.17).

4.3. ПРЯМОУГОЛЬНАЯ ДИМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОЕКЦИЯ

В прямоугольной диметрии ось z расположена вертикально, ось x — под углом 7°10′, а ось y — под углом 41°25′ к горизонтальной прямой (рис. 4.18). Все отрезки прямых линий геометрического объекта, которые параллельны осям x, y и z на комплексном чертеже, останутся параллельными соответствующим осям в диметрической проекции.

Длины ребер куба на изображении, отложенные в направлении осей x и z, сокращаются до 0,94 действительной длины, а в направлении оси y — до 0,47 действительной длины (рис. 4.19).

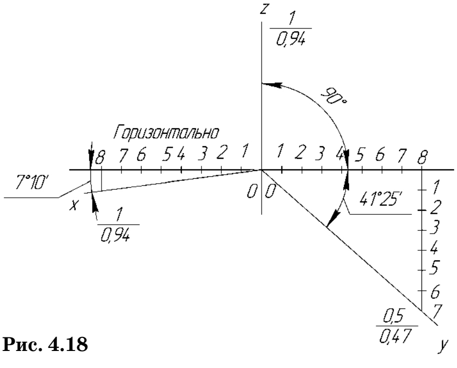


Рис. 4.18

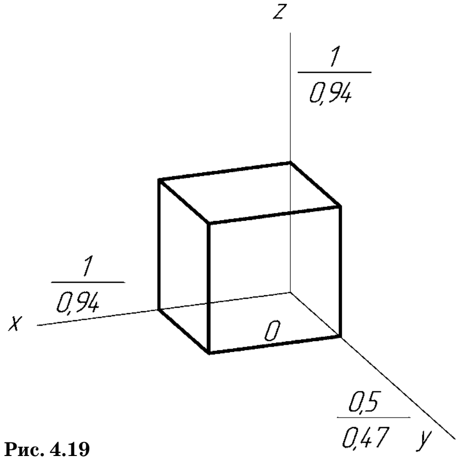


Рис. 4.19

Построение диметрической проекции точки (рис. 4.20). Сначала строим оси, как показано на рисунке 4.18. Откладываем от точки O (начала координат) последовательно отрезки на одной из осей и параллельные двум другим осям, получаем точку A.

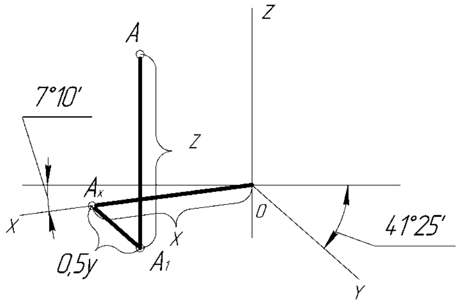


Рис. 4.20

При построении прямоугольной диметрии координатной ломаной линии следует учитывать, что коэффициент искажения по координатным осям x и z (см. рис. 4.19) $K_{x^0} = K_{z^0} = 0{,}94$, принимают равным *единице* $K_{x^0} = K_{z^0} = 1$, а по оси y коэффициент искажения $K_{y^0} = 0{,}47$, принимают равным $0{,}5$.

Линии штриховки сечений в прямоугольной диметрической проекции наносят, как показано на рисунке 4.21, параллельно одной из диагоналей проекций квадратов, лежащих в соответствующих координатных плоскостях, стороны которых параллельны аксонометрическим осям («спроецированная» штриховка).

На рисунке 4.22 показано изображение трехгранной призмы в прямоугольной диметрии. Если ребра призмы параллельны оси x или z, то размер

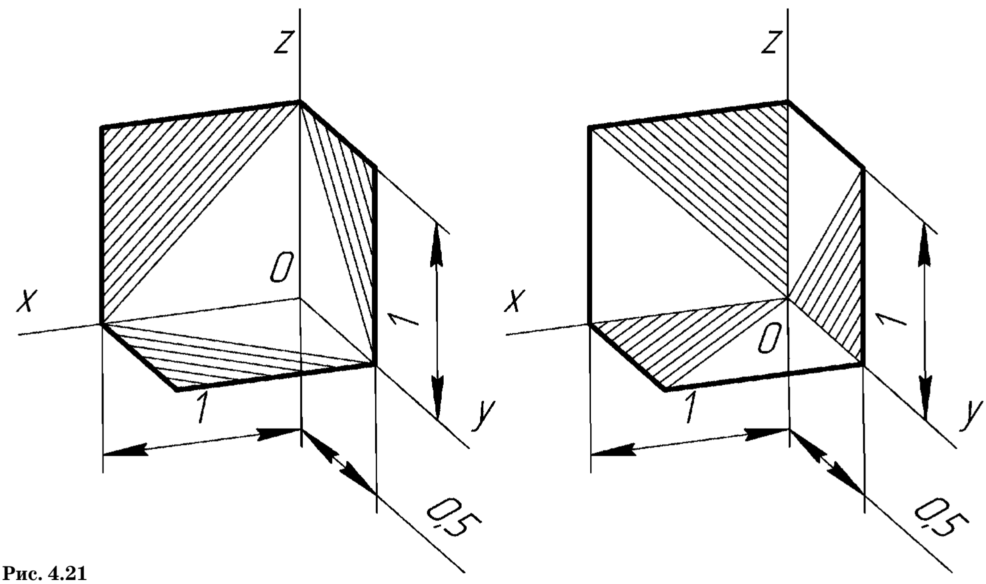


Рис. 4.21

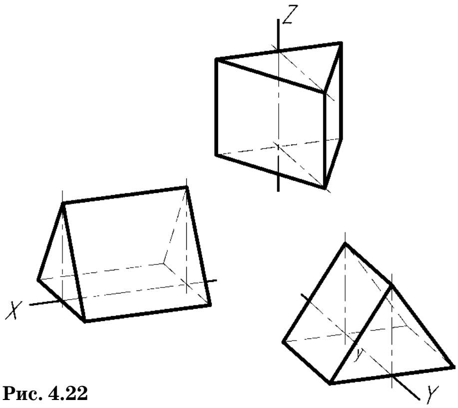


Рис. 4.22

высоты не меняется, но искажается форма основания. При расположении ребер параллельно оси y, высота призмы сокращается вдвое.

Прямоугольная диметрическая проекция окружности. Если построить диметрическую проекцию куба, в грани которого вписаны окружности диаметра D' (рис. 4.23*а*), то квадратные грани куба будут изображаться в виде двух параллелограммов и ромба, а окружности — в виде эллипсов (рис. 4.23*б*). Для построения диметрической проекции окружности (эллипса), расположенной в плоскости, параллельной фронтальной плоскости проекций, надо разделить половину большой диагонали ромба на 10 равных частей. Эллипс должен пройти через точку *3*. Проведя через полученную точку *3* две прямые, параллельные осям x и z, на пересечении с малой диагональю ромба получим еще две точки *3*, принадлежащие эллипсу. Далее, проводя прямые, параллельные осям до пересечения с диагоналями параллелограммов, получаем точки *3* на остальных гранях куба.

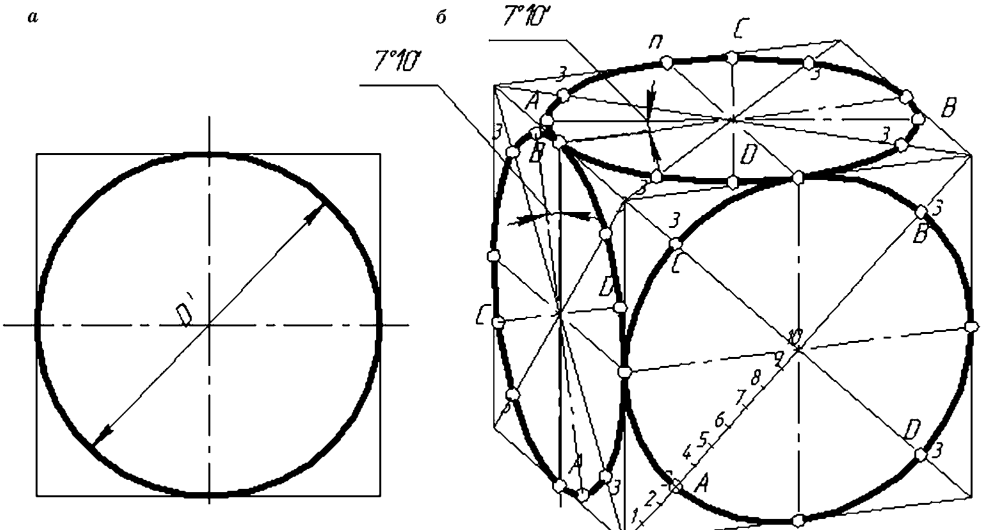


Рис. 4.23

Кроме точек *3*, имеются еще четыре точки, через которые проходит эллипс. Эти точки расположены на серединах сторон параллелограммов (например, точка *n*). Найденные точки эллипсов соединяют кривой по лекалу.

Окружности в прямоугольной диметрической проекции изображаются в виде эллипсов. Большая ось эллипсов во всех случаях равна 1,06 *D*, где *D* — диаметр окружности. Малые оси эллипсов, расположенных на гранях куба, параллельных горизонтальной и профильной плоскостям проекций, равны 0,35 *D*, а на грани, параллельной фронтальной плоскости, — 0,95 *D* (рис. 4.24). Большие оси эллипсов всегда перпендикулярны соответствующим координатным осям, а малые — им параллельны.

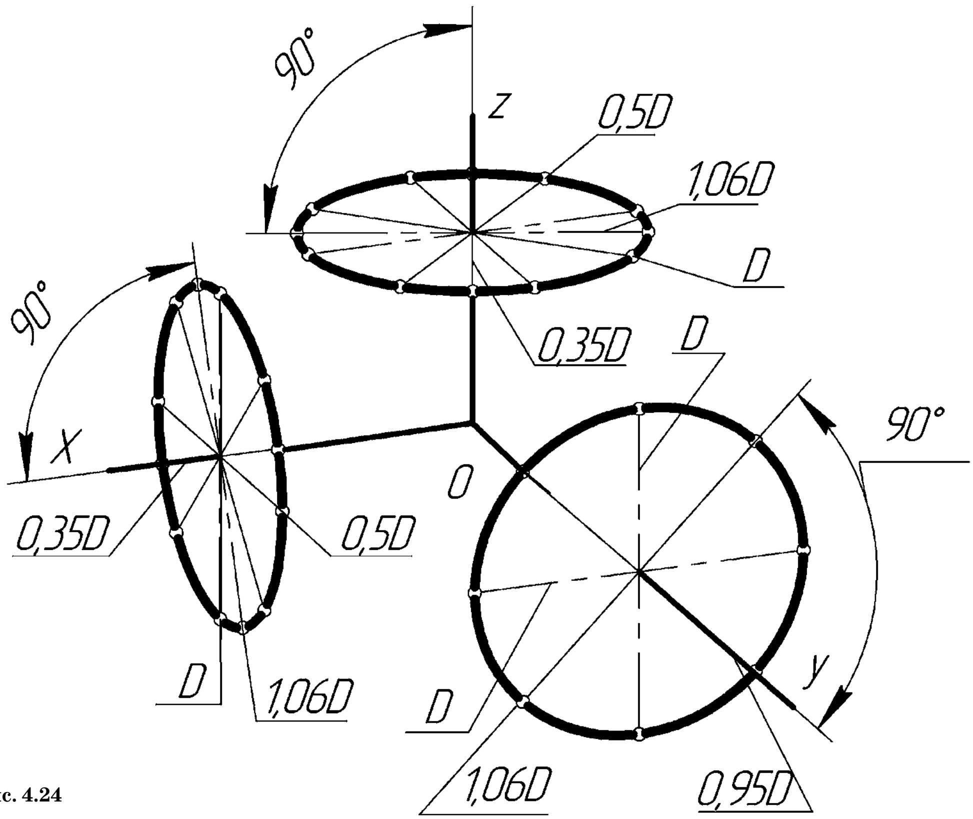


Рис. 4.24

На рисунках 4.25, 4.27 и 4.29 показаны поверхности вращения, выполненные в диметрии с эллипсами, расположенными параллельно горизонтальной плоскости проекций (рис. 4.25), фронтальной плоскости проекций (рис. 4.27), профильной плоскости проекций (рис. 4.29).

В учебных чертежах для упрощения построения диметрических проекций окружности вместо эллипсов рекомендуется применять овалы, очерченные дугами окружностей. Упрощенный способ построения *диметрических овалов* приведен на рисунках 4.26, 4.28, 4.30.

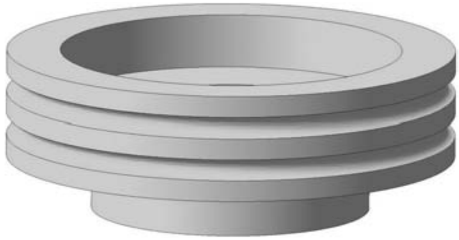


Рис. 4.25

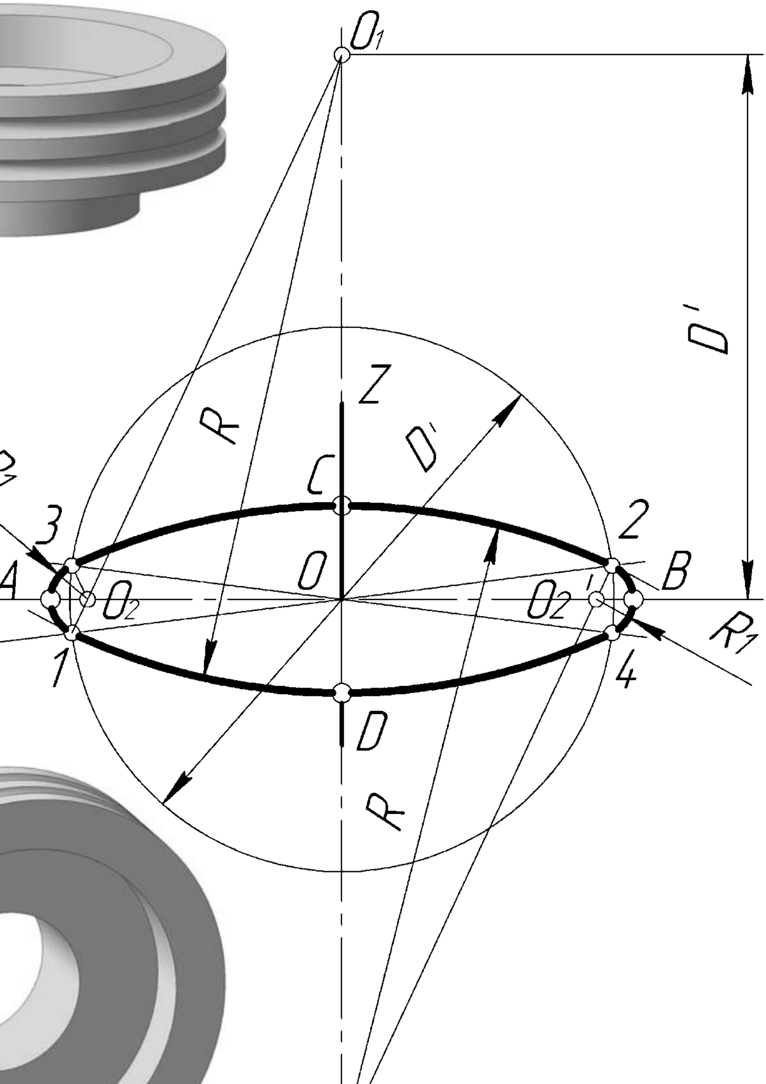


Рис. 4.26

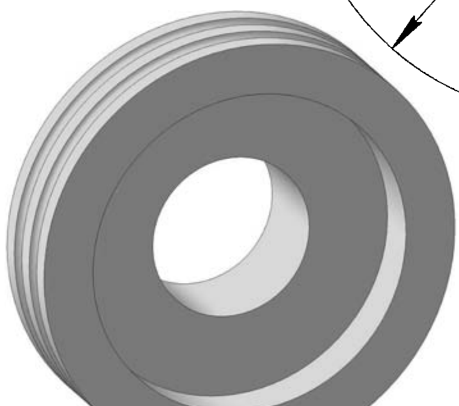


Рис. 4.27

Для построения диметрического овала в плоскости, параллельной горизонтальной плоскости проекций (рис. 4.26), через точку O проводят оси x и z, как показано на рисунке 4.18, а также большую ось овала AB перпендикулярно малой оси CD, принадлежащей оси z. Из центра O диаметром D', равным действительной величине диаметра изображаемой окружности, проводят вспомогательную окружность и на оси x получают точки *1* и *2*. Симметричным переносом относительно большой оси овала AB получают точки *3* и *4*.

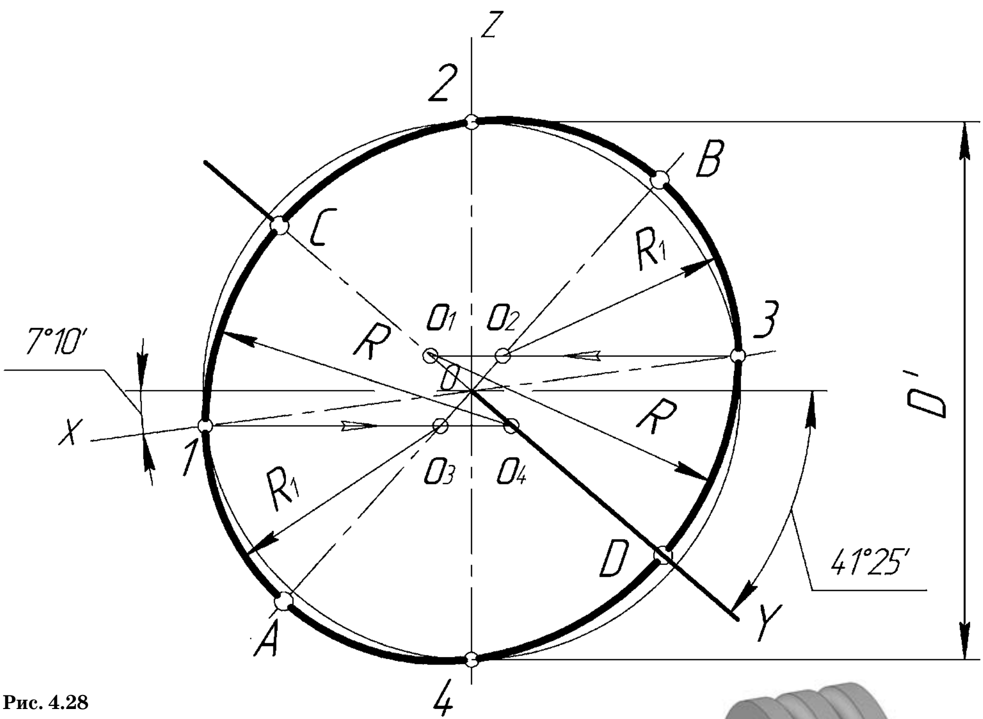


Рис. 4.28

Рис. 4.29

На оси z вверх и вниз от центра O откладывают отрезки, равные диаметру вспомогательной окружности D', и получают точки O_1 и O_1' — центры радиусов R. Соединив полученные точки O_1 и O_1' с точками *1* и *2* соответственно, получают точки O_2 и O_2' — центры радиусов $R1$. Из центров O_1 и O_1' проводят дуги *1–4* и *3–2* радиусом R. Из центров O_2 и O_2' проводят дуги *1–3* и *2–4* радиусом R_1.

Для построения овала в плоскости, параллельной фронтальной плоскости проекций (см. рис. 4.28), проводят оси овала x и z, как показано на рисунке 4.18.

Из точки пересечения осей O проводят вспомогательную окружность диаметром D', равным действительной величине диаметра изображаемой окружности, и находят точки *1*, *2*, *3*, *4* — точки пересечения этой окружности с аксонометрическими осями x и z. Из точек *1* и *3* по направлению стрелок проводят горизонтальные линии до пересечения с осями AB и CD и получают точки O_1, O_2, O_3, O_4. Из центров O_1 и O_4 проводят дуги *1–2* и *3–4* радиусом R. Из центров O_2 и O_3 проводят дуги *1–4* и *2–3* радиусом R_1.

На рисунке 4.30 показано упрощенное построение диметрической проекции окружности, расположенной в плоскости, параллельной профиль-

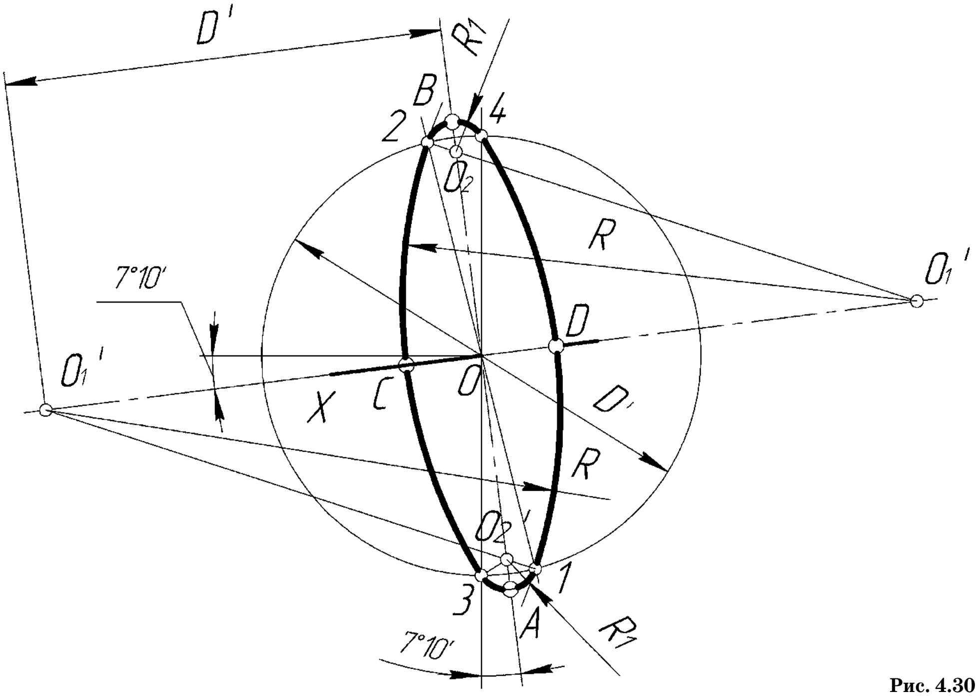


Рис. 4.30

ной плоскости проекций. Построение аналогично построению диметрического овала окружности, расположенной в плоскости, параллельной горизонтальной плоскости проекций, разница лишь в том, что большую ось овала AB располагают перпендикулярно малой оси CD, принадлежащей оси x.

На рисунке 4.31 приведен пример построения прямоугольной диметрической проекции детали.

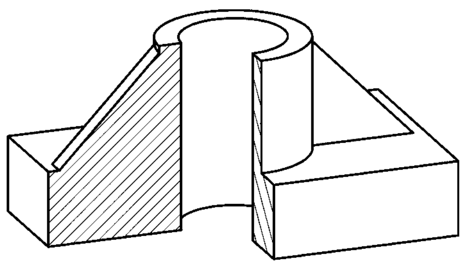


Рис. 4.31

Необходимо отметить, что при помощи аксонометрических проекций имеется возможность решать как позиционные, так и метрические задачи.

Отметим, что в инженерной практике, и в частности в машиностроении, наибольшее распространение нашли прямоугольные изометрические и диметрические проекции.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Для чего нужны наглядные изображения предметов?
2. Назвать способы построения наглядных изображений.
3. Сформулировать основное свойство аксонометрического проецирования.
4. Сформулировать сущность метода аксонометрического проецирования.
5. Что такое коэффициент искажения?
6. Охарактеризовать стандартные аксонометрические проекции.
7. Чем характеризуется прямоугольная изометрия?
8. Чем характеризуется прямоугольная диметрия?
9. Как изображается окружность в аксонометрии?
10. Чему равны большая и малая оси эллипса в изометрии и диметрии?
11. Описать на примере построение аксонометрической проекции детали по ее ортогональным проекциям.
12. Как штрихуются разрезы в изометрии, диметрии?

5 ЛИНИИ

Следующим геометрическим объектом является линия и изображение ее проекций. Далее по тексту показано многообразие типов линий и их различные положения относительно плоскостей проекций.

5.1. ОБЩИЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Линией называется след, оставляемый точкой при ее движении в пространстве. Линии подразделяют на алгебраические (окружность, эллипс, парабола, гипербола, астроида, кардиоида и др.), если в декартовой системе координат они определяются алгебраическими уравнениями, и трансцендентные (синусоида, циклоида, спираль Архимеда и др.), если трансцендентны их уравнения ($y = \cos\alpha t$, $y = e^{\alpha t}$ и т. п.).

Линии могут быть пространственными (точки которых не лежат в одной плоскости) и плоскими (все точки которых лежат соответственно в одной плоскости). Из пространственных линий в практике наиболее распространенной является винтовая линия выступов или впадин профиля резьбы.

Линии бывают лекальными (вычерчиваемые при помощи лекала) и циркульными (вычерчиваемые при помощи циркуля).

Сопрягаемыми (когда переход от одной линии к другой происходит плавно, без излома) называют линии, у которых в точках перехода от одной линии к другой совпадают касательные.

Способы задания кривых на комплексном чертеже:

1) аналитический, когда линия задается математическим уравнением;

2) графический, когда кривая задается визуально на носителе графической информации;

3) табличный, когда линия задается в виде таблицы, содержащей координаты последовательного ряда принадлежащих линии точек.

5.2. ИЗОБРАЖЕНИЕ ЛИНИЙ НА КОМПЛЕКСНОМ ЧЕРТЕЖЕ. ПРЯМАЯ ЛИНИЯ, ОТРЕЗОК

На комплексном чертеже кривая линия изображается путем построения проекций точек, принадлежащих этой кривой, с дальнейшей графической аппроксимацией этих точек, т. е. соединением проекций точек плавной линией (рис. 5.1). Для большей кривизны берут меньшее расстояние между точками.

Если кривая линия имеет излом (несовпадение касательных в точке перехода кривых с различной кривизной), то необходимо показывать проекции точек излома.

Примечательно, что по двум ортогональным проекциям кривой не всегда удается определить, плоская это или пространственная линия. На рисунке 5.2 показана кривая линия l, которая является пространственной, так как точка M, взятая на кривой, не принадлежит плоскости τ, определяемой тремя другими точками A, B, C этой кривой.

Если основой построения геометрии служит понятие расстояния между двумя точками пространства, то прямую линию можно определить как линию, путь вдоль которой равен расстоянию между двумя точками. Отрезком

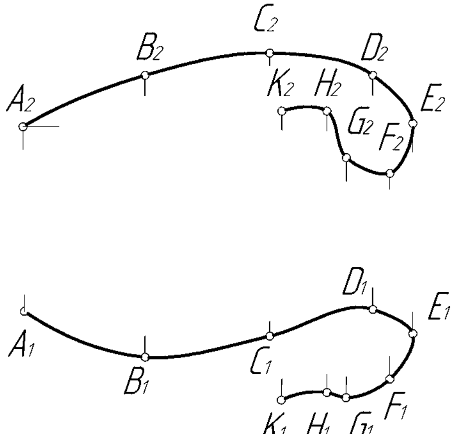
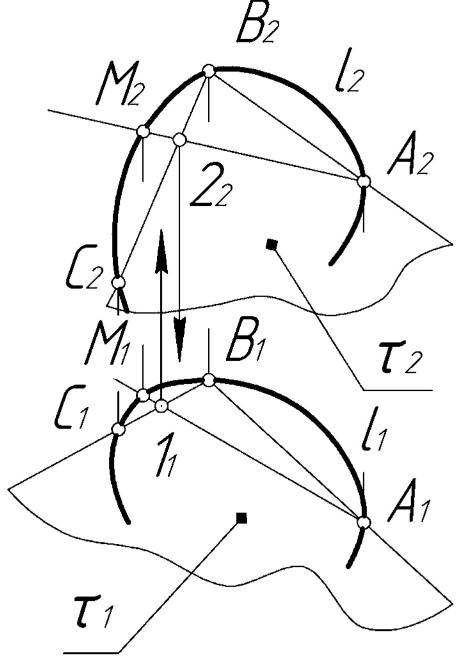


Рис. 5.1

Рис. 5.2



называется часть прямой линии, ограниченная двумя точками (отрезок [AB] на рисунках 5.3, 5.4). При построении проекции прямой следует исходить из инвариантного свойства 2 (п. 2.2.3) ортогонального проецирования:

$$(\forall a)\wedge(a \not\perp \Pi)\text{: } a \to a\Pi\ (\forall a)\wedge(a \not\perp \Pi) : a \to a\Pi.$$

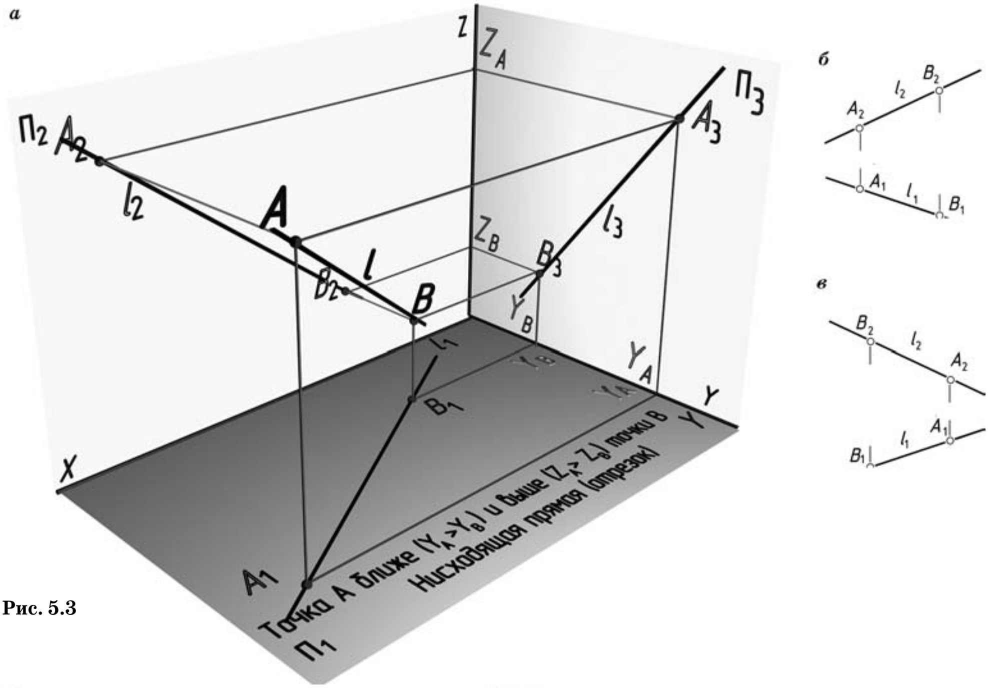


Рис. 5.3

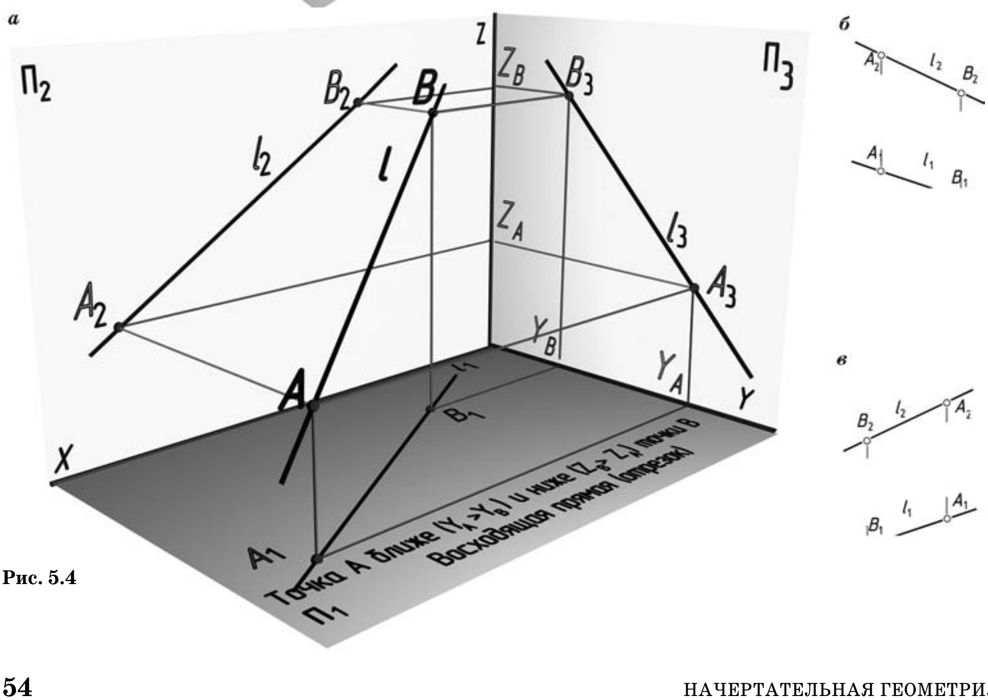


Рис. 5.4

При ортогональном проецировании на плоскость прямая, не перпендикулярная плоскости проекции, проецируется в прямую. Поэтому для определения проекции прямой достаточно знать проекции двух нетождественных точек, принадлежащих этой прямой.

По расположению относительно плоскостей проекций линии (отрезки) можно классифицировать на линии (отрезки) общего и частного положения.

5.3. ЛИНИИ (ОТРЕЗКИ) ОБЩЕГО ПОЛОЖЕНИЯ

Линии общего положения по отношению к плоскостям проекций располагаются под углом, отличным от 0°, 180° или 90° (рис. 5.3, 5.4).

Для такой прямой

$$z_B - z_A \neq 0; \quad y_B - y_A \neq 0; \quad x_B - x_A \neq 0.$$

На рисунке 5.3*а* показано наглядное изображение нисходящей прямой l, а на рисунке 5.3*б*, *в* — ее эпюр, для которого точка, расположенная дальше по отношению к наблюдателю, будет ниже:

$$Y_B > Y_A \wedge Z_B > Z_A.$$

На рисунке 5.4*а* показано наглядное изображение восходящей прямой l, а на рисунке 5.4*б*, *в* — ее эпюр, для которого точка, расположенная дальше по отношению к наблюдателю, будет выше:

$$Y_A > Y_B \wedge Z_B > Z_A.$$

Таким образом, анализируя комплексные чертежи восходящего и нисходящего отрезка или прямой линии, по расположению проекций можно определить положение прямой относительно наблюдателя. Если обе проекции имеют взаимное положение, близкое к пересекающимся прямым, то отрезок (или прямая линия) нисходящий. В том случае, когда расположение двух проекций близко к расположению параллельных линий, имеем восходящую прямую линию.

На рисунке 5.5 приведен комплексный чертеж отрезка [AB], на котором показаны разности координат, являющиеся инвариантами. Следует обратить внимание **на равенство отрезков Δy на горизонтальной и профильной проекциях, что позволяет строить третью проекцию отрезка по двум известным.**

Пример 6

Задание: построить профильную проекцию отрезка [AB] (рис. 5.6*а*).

Решение: показываем линии связи для профильной и фронтальной проекций точек A и B. На профильной плоскости проекций показываем (произвольно) проекцию наиболее удаленной точки (предварительно определив положение точек A и B на горизонтальной плоскости проекций). Для данной задачи точка A будет ближайшей, ее горизонтальная проекция ниже точки B; значит, профильная проекция последней будет самой левой и все точки отрезка будут правее. Теперь все дальнейшие построения будут производиться правее этой точки.

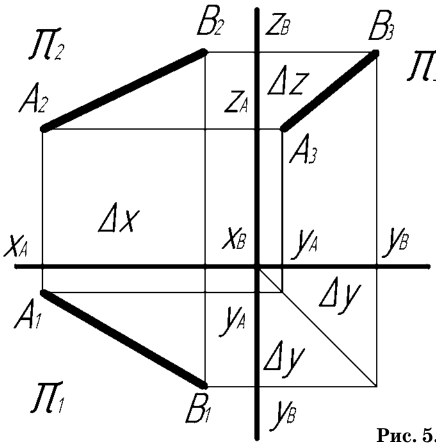


Рис. 5.5

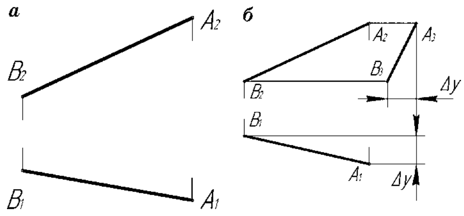


Рис. 5.6

На горизонтальной плоскости проекций определяем разность координат вдоль оси y — Δy.

Откладываем Δy от профильной проекции точки B_3 вправо вдоль линии связи и показываем профильную проекцию точки A (A_3).

Соединяя проекции, получаем третью проекцию [AB].

В заключение отметим следующее свойство проекций и прямой общего положения. **Натуральная величина отрезка общего положения всегда больше любой из его проекций.**

5.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАТУРАЛЬНОЙ ВЕЛИЧИНЫ ОТРЕЗКА ПРЯМОЙ И УГЛОВ НАКЛОНА К ПЛОСКОСТЯМ ПРОЕКЦИЙ (ПРАВИЛО ПРЯМОУГОЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА)

Расположим отрезок общего положения таким образом, чтобы точка B находилась на плоскости проекций П (рис. 5.7). Прямоугольный треугольник образован так: один катет — проецирующий луч; второй — проекция отрезка на плоскость П — $A_П B_П$. Гипотенузой будет отрезок [AB]. Повернув на угол 90° треугольник $A_П B_П A$ вокруг проекции $A_П B_П$ и совместив его с пло-

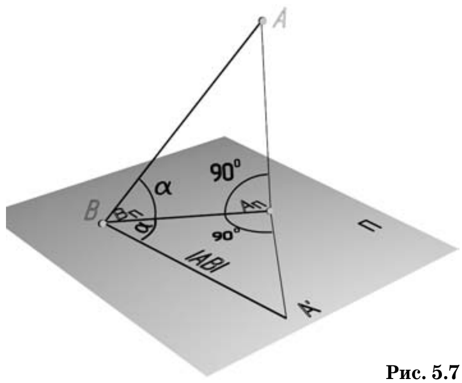


Рис. 5.7

скостью проекций, получим изображение прямоугольного треугольника на плоскости проекций П (рис. 5.7). Тогда правило прямоугольного треугольника можно сформулировать следующим образом: натуральная величина отрезка графически определяется как гипотенуза треугольника, у которого одним из катетов является проекция отрезка, а вторым — разность расстояний от точек отрезка до плоскости проекций. На рисунке 5.7 эта разность будет равна расстоянию от точки A до плоскости проекций П (точка B расположена на плоскости проекций). Угол наклона отрезка к плоскости проекций прилежит к проекции отрезка.

Покажем плоскости проекций и еще раз рассмотрим прямоугольный треугольник (рис. 5.8). Как видно из рисунка 5.8, разность расстояний от точек отрезка до плоскости проекций является разностью координат до этой плоскости проекций (в данном случае ΔZ_{AB}). Тогда

$$|AB|^2 = |A_1B_1|^2 + |\Delta Z_{AB}|^2.$$

Следует отметить, что угол наклона к горизонтальной плоскости проекций α не равен для отрезка общего положения углу δ (рис. 5.8).

Значит, для определения натуральной величины необходимо и достаточно двух проекций. Такое определение натуральной величины называется

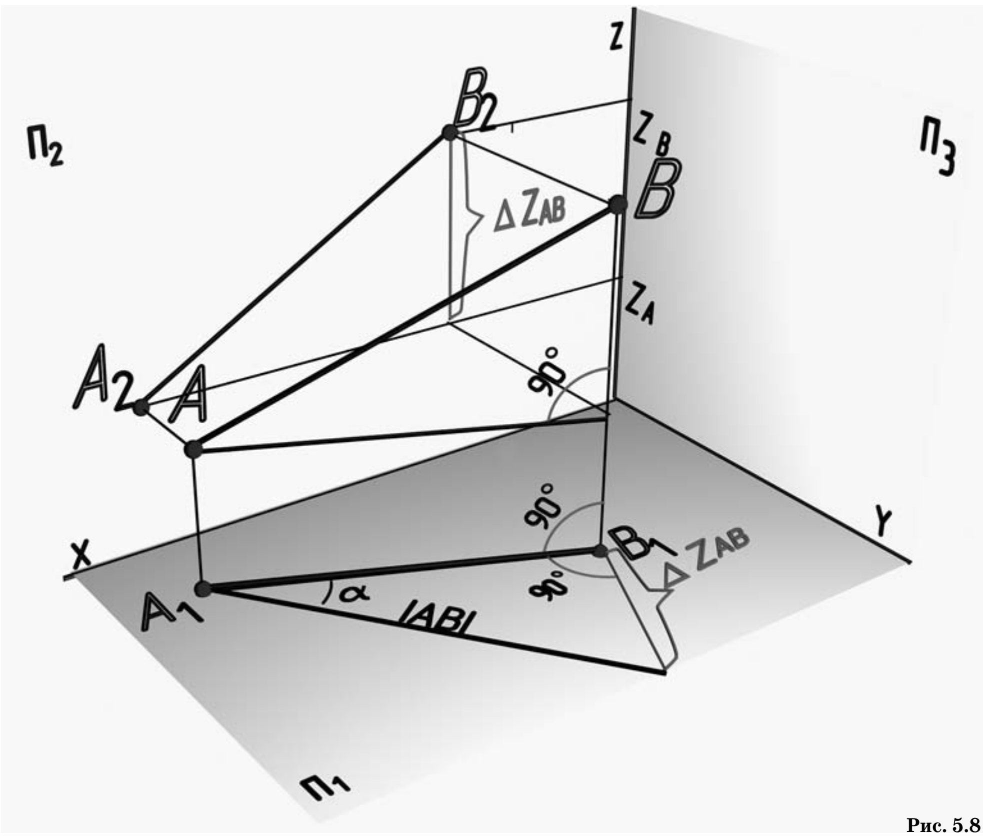


Рис. 5.8

правилом прямоугольного треугольника, которое формулируется следующим образом: натуральная величина отрезка определяется как гипотенуза прямоугольного треугольника, у которого один катет — проекция отрезка, а другой катет — разность координат до плоскости проекций, на которой строится треугольник, и угол наклона к этой плоскости проекций противолежит разности координат (рис. 5.9).

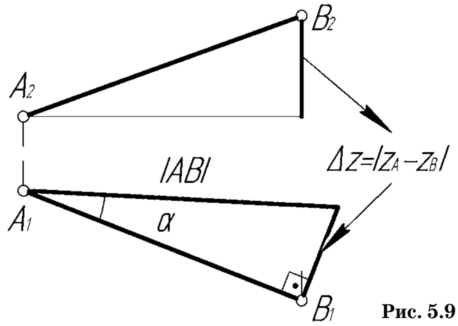


Рис. 5.9

Чтобы определить величины углов наклона α, β и γ (к плоскостям проекций горизонтальной, фронтальной и профильной соответственно), необходимо построить по указанному выше правилу прямоугольный треугольник на этой плоскости. Естественно, во всех случаях натуральная величина одного и того же отрезка на треугольниках, построенных на разных плоскостях, будет одинакова.

Пример 7

Задание: на рисунке 5.10 показаны две проекции пространственной кривой. Определить ее длину.

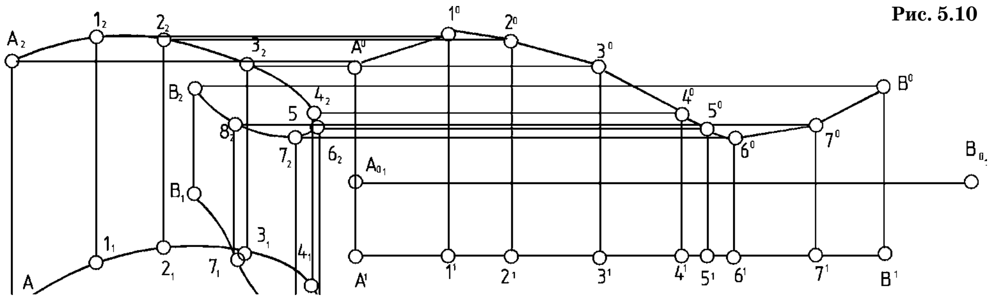
Решение: чтобы определить длину, спрямляем прямую, применяя правило прямоугольного треугольника следующим образом:

1. Спрямляем горизонтальную проекцию, предварительно разбив ее на дуги, мало отличающиеся от стягивающих их хорд (рис. 5.10). Откладываем длины хорд

$$|A_1 1_1|, |1_1 2_1|, |2_1 3_1|, \dots, |7_1 B_1|$$

на горизонтальной проекции прямой в последовательности, которую они занимали на проекции кривой. Эти длины будут катетами проекций.

Рис. 5.10



2. Второй катет Δz показываем таким образом: из точек A^1, 1^1, 2^1, … , B^1 прямой a проводим перпендикуляры и отмечаем точки их пересечения с горизонтальными прямыми, проведенными через соответствующие фронтальные проекции точек A_2, 1_2, 2_2, 3_2, … , B_2.

3. Полученные точки пересечения A^0, 1^0, 2^0, … , B^0 укажут вершины ломаной линии. Далее выпрямляем последнюю и получаем отрезок $|A_0B_0|$, приближенно равный длине пространственной кривой. С увеличением количества точек разбиения проекций увеличивается точность построения.

Пример 8

Задание: определить натуральную величину отрезка [AB] (рис. 5.11*а*) и углы наклона его к плоскостям проекций. Применить правило прямоугольного треугольника.

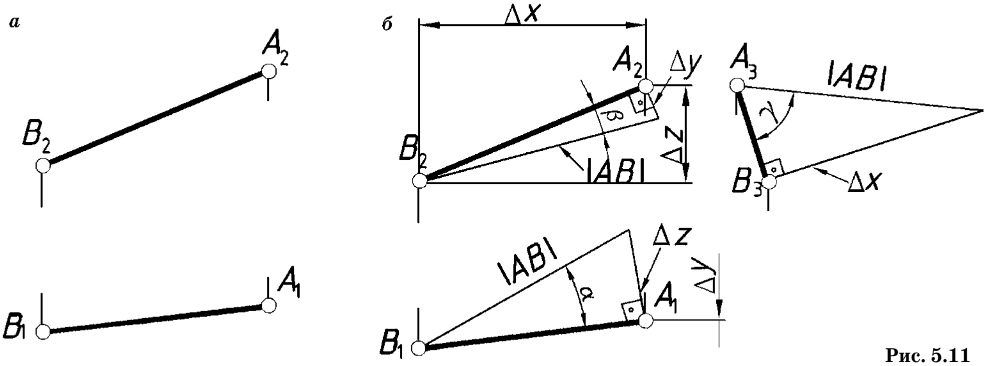


Рис. 5.11

Решение: проводим линию, перпендикулярную к одной из проекций отрезка [AB]. Перпендикуляр восстанавливаем из проекции любой точки — A или B (рис. 5.11*б*).

Откладываем на перпендикуляре отрезок, равный разности расстояний от точек отрезка до соответствующей плоскости проекций: Δx (до Π_3), Δy (до Π_2) или Δz (до Π_1) — разности координат точек вдоль оси, перпендикулярной к плоскости проекций, на которой строится прямоугольный треугольник.

Строим прямоугольный треугольник, одним катетом которого будет проекция отрезка, а вторым катетом — разность координат. Длина гипотенузы будет равна натуральной величине отрезка (*правило прямоугольного треугольника*).

Угол, противолежащий катету, равному разности координат, будет углом наклона к соответствующей плоскости проекций: α — угол наклона к горизонтальной плоскости проекций; β — угол наклона к фронтальной плоскости проекций; γ — угол наклона к профильной плоскости проекций.

При построении прямоугольного треугольника для определения угла наклона к плоскости Π_3 необходимо построить профильную проекцию отрезка (см. пример 6).

Отметим, что данная задача определяет длину отрезков и углы наклона их к плоскостям проекций. В начертательной геометрии подобного рода задачи называются метрическими.

Задачи, связанные с определением положения геометрических объектов друг относительно друга, называют позиционными.

Пример 9

Задание: на прямой m определить точку C, удаленную от точки A на 30 мм (рис. 5.12*а*).

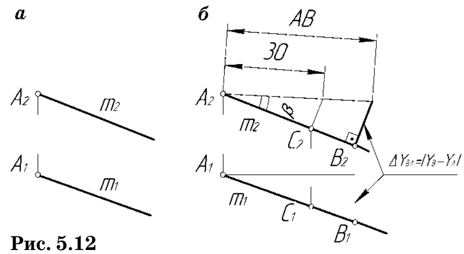


Рис. 5.12

Решение: для решения задачи зададим на прямой m произвольную промежуточную точку B (рис. 5.12*б*) и определим на комплексном чертеже натуральную величину полученного отрезка [AB], на которой отложим 30 мм (натуральную величину [AC]). Опустив перпендикуляр из полученной отметки на проекцию отрезка, определим фронтальную проекцию точки C, а по линиям связи — горизонтальную проекцию.

Пример 10

Задание: построить нисходящий отрезок длиной 30 мм и определить его угол наклона к фронтальной плоскости проекций (рис 5.13).

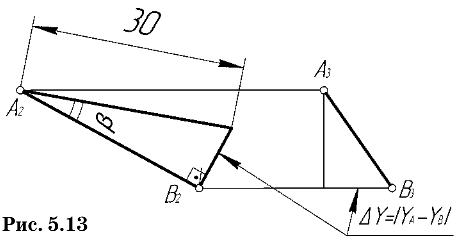


Рис. 5.13

Решение: для построения отрезка общего положения воспользуемся правилом прямоугольного треугольника. Угол наклона к фронтальной плоскости проекций будет у треугольника, построенного на этой же плоскости проекций. Поэтому построим прямоугольный треугольник, у которого гипотенуза равна 30 мм (рис. 5.13).

Один катет — фронтальная проекция отрезка AB, другой — разность координат вдоль оси y — ΔY_{AB}. Измеряем ее и откладываем на профильной проекции по линиям связи, отмечаем положение проекции точки A (так как она будет самая левая, а значит, на профильной проекции дальняя по отношению к наблюдателю). Точка A выше и дальше точки B — восходящий отрезок.

5.5. ПРЯМЫЕ ЧАСТНОГО ПОЛОЖЕНИЯ

Прямые (отрезки), расположенные особым образом, т. е. параллельно или перпендикулярно плоскостям проекций, называются прямыми частного положения, которые подразделяются на прямые уровня и проецирующие прямые. По комплексному чертежу прямых частного положения можно определить метрические параметры: натуральную величину и углы наклона к плоскостям проекций без дополнительных построений. Необходимо отметить, что эти прямые играют важную роль при решении задач начертательной геометрии. Поэтому **дальнейшее изучение начертательной геометрии без умения видеть эти прямые и знать их свойства бессмысленно.**

5.5.1. ПРЯМЫЕ УРОВНЯ

Прямые, параллельные плоскостям проекций, называются прямыми уровня. На рисунке 5.14*а* показано наглядное изображение, а на рисунке 5.14*б* приведен комплексный чертеж прямой, параллельной горизонтальной плоскости проекций, имеющей одноименное с плоскостью проекций название — *горизонтальная прямая уровня*, или *горизонталь*. Она обозначается буквой h.

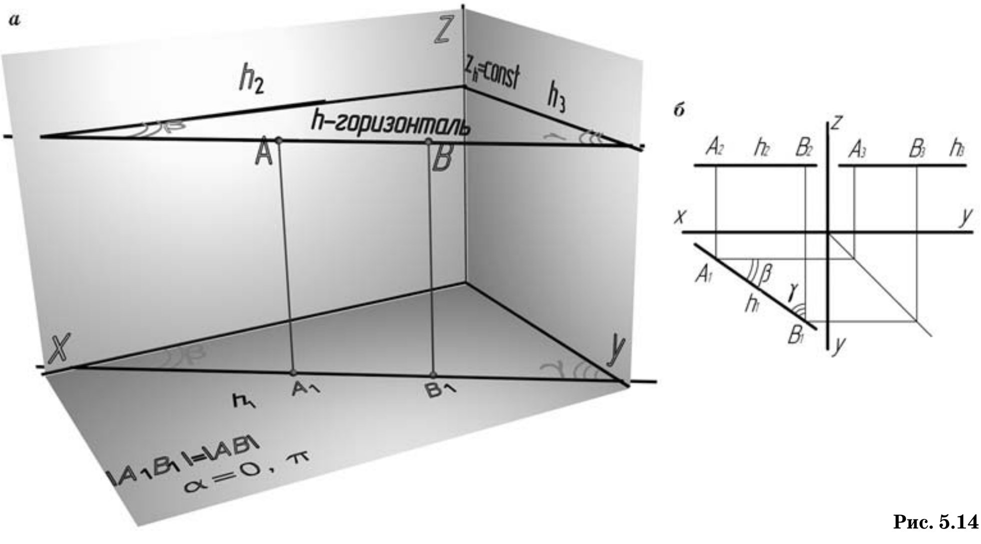


Рис. 5.14

Рассмотрим свойства данной прямой уровня. Покажем отрезок $[AB]$ и определим его проекции. Так как $h \parallel h_1$, то $|AB|=|A_1B_1|$, т. е. на горизонтальную плоскость проекций горизонтальная прямая уровня проецируется без искажения. Проекция горизонтали на фронтальную плоскость проекций параллельна оси x и перпендикулярна оси z, а ее профильная проекция параллельна оси y и перпендикулярна оси z. Кроме того, из рисунка 5.14 видно, что на горизонтальной плоскости проекций можно определить натуральную величину углов наклона к плоскостям проекций: фронтальной — β и профильной — γ.

Прямая, параллельная фронтальной плоскости проекций, называется *фронтальной прямой уровня,* или *фронталью f* (рис. 5.15).

Как видно из рисунка 5.15, свойства фронтали: фронтальная проекция является натуральной величиной $|AB|=|A_2B_2|$, горизонтальная проекция фронтали параллельна оси x и перпендикулярна оси y, а профильная проекция (f_3) параллельна оси z и перпендикулярна оси y. Кроме того, из рисунка 5.15 видно, что на фронтальной проекции можно определить натуральную величину углов наклона к плоскостям проекций: горизонтальной — α и профильной — γ.

Прямая, параллельная профильной плоскости проекций, называется *профильной прямой уровня p* (рис. 5.16).

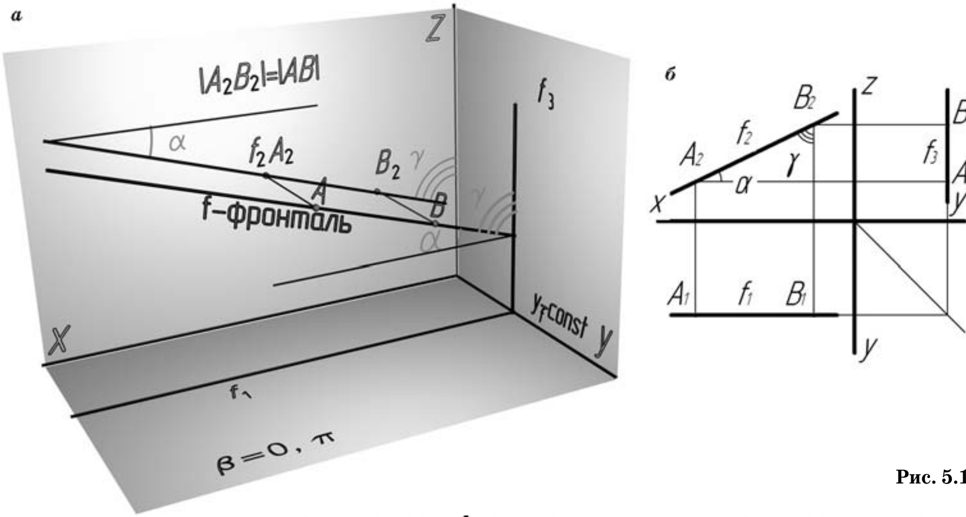


Рис. 5.15

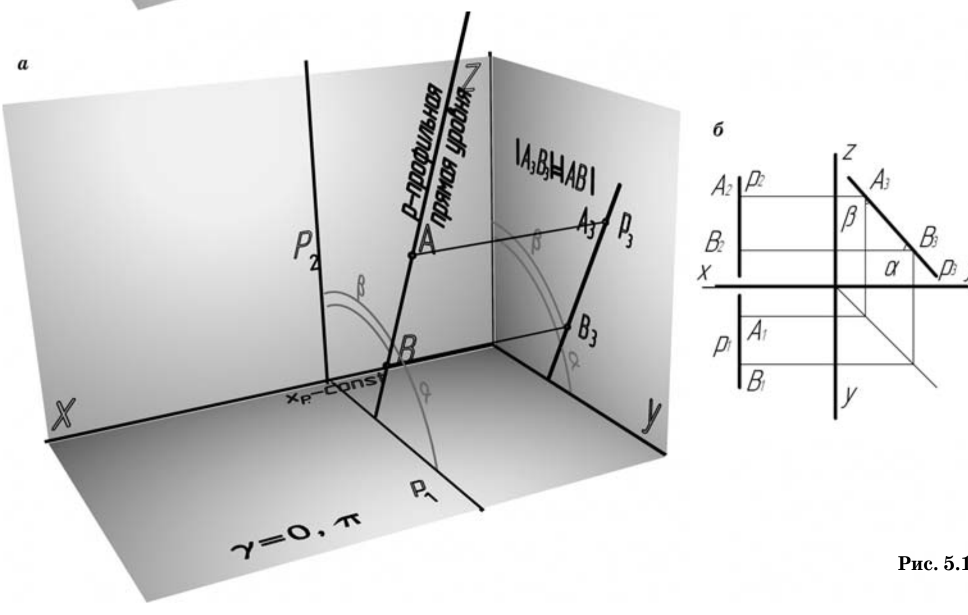


Рис. 5.16

Анализируя рисунок 5.16, можно сформулировать свойства профильной прямой уровня (отрезка): $|AB|=|A_3B_3|$, т. е. на профильную плоскость проекций профильная прямая уровня проецируется в натуральную величину, горизонтальная и фронтальная проекции (p_1 и p_2) параллельны оси z и перпендикулярны оси x. Кроме того, из рисунка 5.16 видно, что на профильной проекции можно определить натуральную величину углов наклона к плоскостям проекций: горизонтальной — α и фронтальной — β.

Пример 11

Задание: построить в трех проекциях отрезок $[AB]=45$ мм, наклоненный к Π_3 под углом 60°. Положение проекций отрезка выбрать самостоятельно.

Решение: так как в условии задан угол наклона к профильной плоскости проекций, то отрезок проще строить параллельно одной из плоскостей проекций, т. е. отрезок, принадлежащий прямой уровня (п. 4.5.1). Поскольку профильная прямая уровня параллельна профильной плоскости проекций, то ее построение не имеет смысла. Остается построение горизонтали или фронтали. Остановимся на построении отрезка, принадлежащего фронтальной прямой уровня. Основываясь на свойствах фронтали, проводим горизонтальную и профильную проекции фронтали — горизонтально и вертикально соответственно (рис. 5.17).

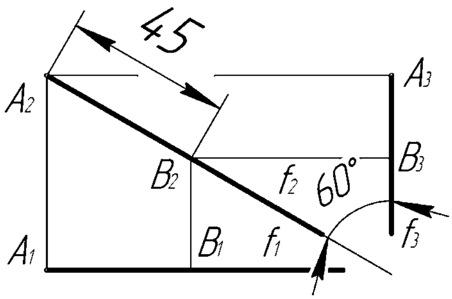


Рис. 5.17

Далее проводим фронтальную проекцию под углом 60° к вертикальной линии. Таким образом, мы показали три проекции прямой, наклоненной под углом 60° к профильной плоскости проекций. На ее фронтальной проекции откладываем отрезок, равный 45 мм, и обозначаем проекции точек A и B. Окончательно проводим линии связи, на которых находим недостающие проекции точек A и B.

Понятие прямых уровня является одним из ключевых в начертательной геометрии. Линии, параллельные плоскостям проекций, позволяют решать ряд задач позиционного и метрического характера (построить прямой угол, проводить дополнительные плоскости проекций и т. д.).

5.5.2. ПРОЕЦИРУЮЩИЕ ПРЯМЫЕ

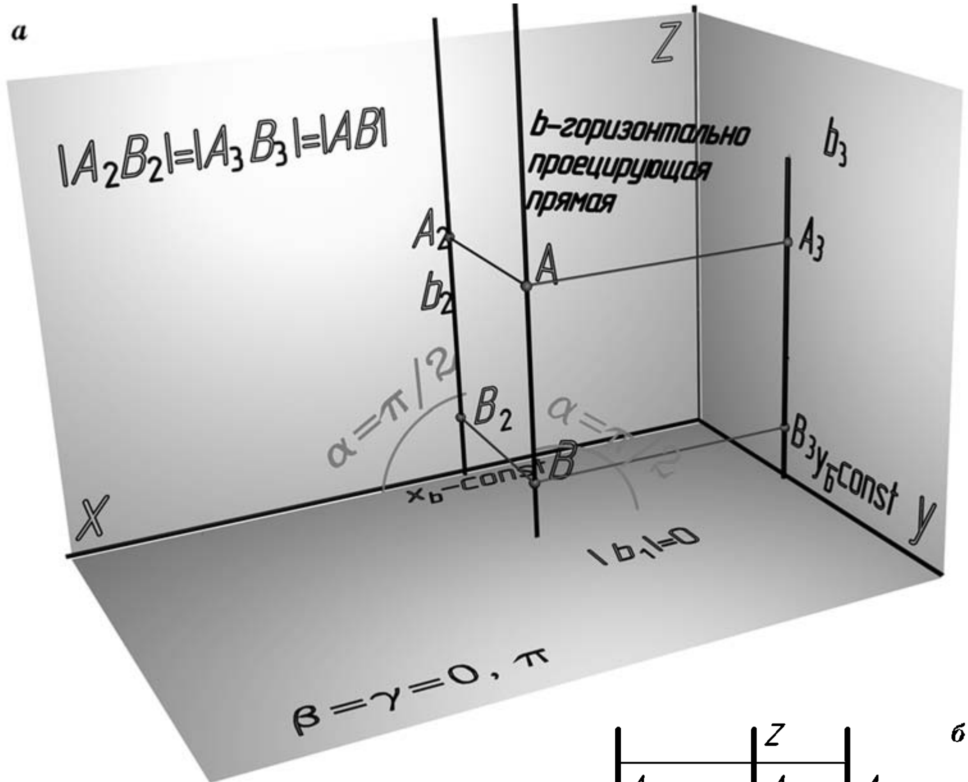
Прямые, перпендикулярные плоскости проекций, называются *проецирующими прямыми*, и их название обусловлено той плоскостью проекций, которой они перпендикулярны.

На рисунке 5.18*а* показано наглядное изображение *горизонтально проецирующей прямой b*, а на рисунке 5.18*б* — комплексный чертеж *горизонтально проецирующей прямой* (отрезка AB).

Свойства: горизонтально проецирующая прямая b параллельна фронтальной и профильной плоскостям проекций и перпендикулярна к горизонтальной плоскости проекций.

$$\alpha=90^\circ,\ \ \beta\wedge\gamma=0^\circ\vee180^\circ,\ \ |b|=|b_2|=|b_3|,\ \ |AB|=|A_2B_2|=|A_3B_3|.$$

а



б

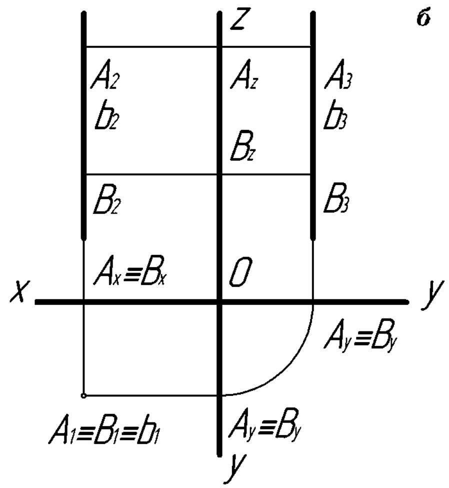


Рис. 5.18

На рисунке 5.19*а* показано наглядное изображение *фронтально проецирующей прямой с* и на рисунке 5.19*б* дан ее комплексный чертеж (отрезка *AB*).

Свойства: *с* параллельна горизонтальной и профильной плоскостям проекций и перпендикулярна фронтальной плоскости проекций.

$$\beta = 90^\circ,\ \ \alpha \wedge \gamma = 0^\circ \vee 180^\circ,\ \ |c| = |c_1| = |c_3|,\ \ |AB| = |A_1B_1| = |A_3B_3|.$$

На рисунке 5.20*а* показано наглядное изображение и дан комплексный чертеж (рис. 5.20*б*) *профильно проецирующей прямой а* (отрезка *AB*).

Свойства: *а* параллельна горизонтальной и фронтальной плоскостям проекций и перпендикулярна профильной плоскости проекций.

$\gamma = 90^\circ,\ \ \beta \wedge \alpha = 0^\circ \vee 180^\circ,\ \ |a| = |a_1| = |a_2|,\ \ |AB| = |A_1B_1| = |A_2B_2|.$

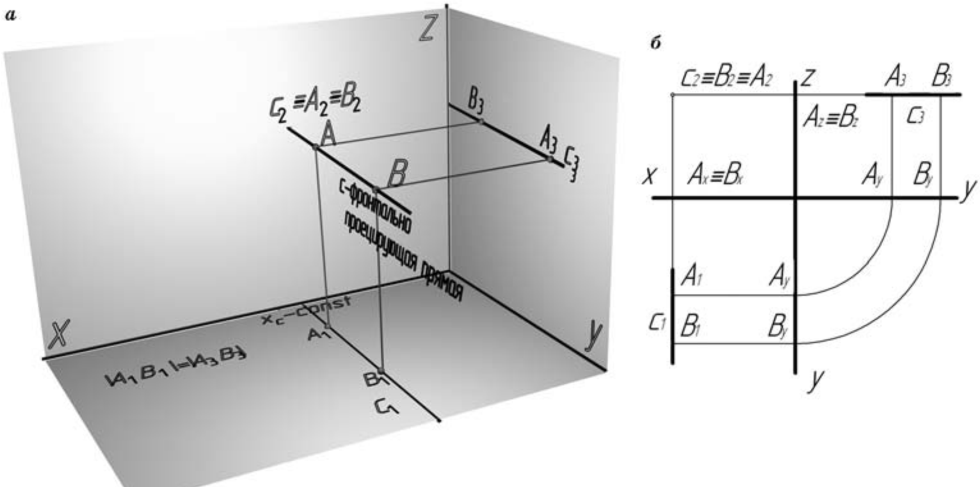


Рис. 5.19

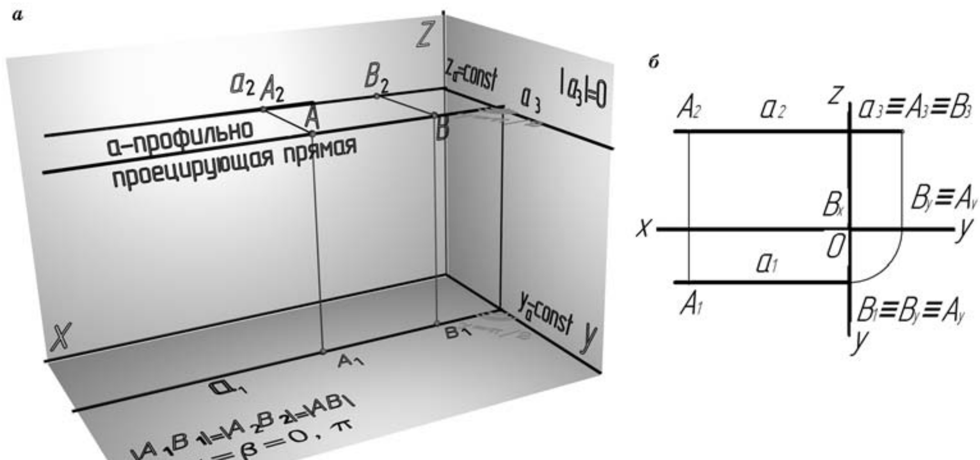


Рис. 5.20

Пример 12

Задание: достроить проекции отрезков и определить углы α, β, γ отрезка горизонтальной прямой уровня $|AB|=50$ мм (рис. 5.21*а*), профильной прямой уровня $|CD|=30$ мм (рис. 5.21*б*).

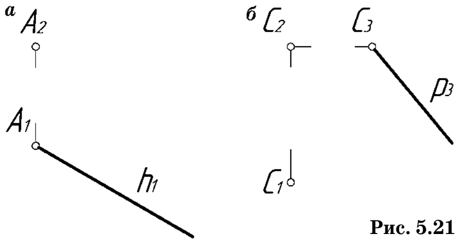


Рис. 5.21

Решение: для построения проекции отрезка [*AB*] (рис. 5.22*а*) воспользуемся свойствами горизонтали: через точку A_2 проводим горизонтальную прямую и на горизонтальной проекции откладываем отрезок $|A_1B_1|=|AB|=50$ мм. По линии связи находим фронтальную проекцию точки *B*. Профильную проекцию горизонтали показываем вдоль линии связи, выбрав положение проекции точки *A* (предварительно определив по горизонтальной проекции, что она самая дальняя, а значит, на профильной проекции самая левая), там же, где и фронтальная проекция точки *B* (можно выбрать и в другой точке на h_3). По известной методике определяем третью проекцию точки *B* и показываем углы наклона прямой.

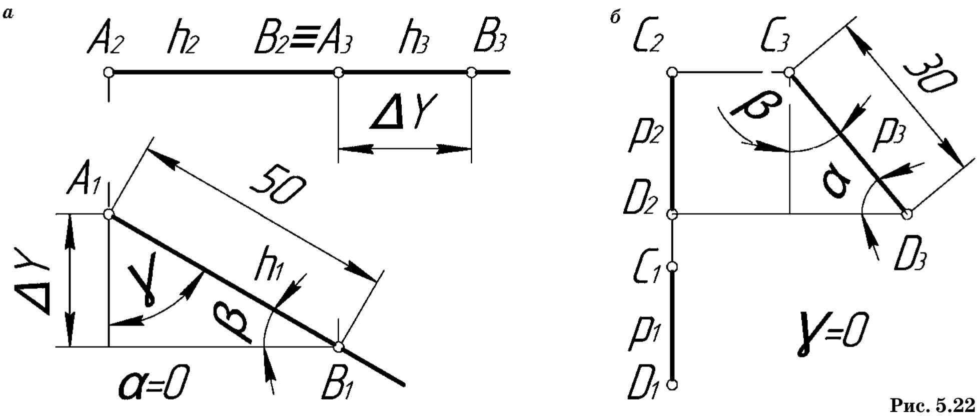


Рис. 5.22

Согласно свойству профильной прямой уровня $|p|=|p_3|$ откладываем на профильной проекции отрезок $|CD|=|C_3D_3|=30$ мм (рис. 5.22*б*). Через горизонтальную и фронтальную проекции точки *C* проводим проекции профильной прямой уровня вертикально (свойство проекций прямой уровня). Дальнейшее построение аналогично задаче, изображенной на рисунке 5.22*а*.

В обоих случаях положение проекций и углы наклона показываем в строгом соответствии свойствам прямых уровня.

Пример 13

Задание: на отрезке [AB] определить точку C так, чтобы [AC] : [CB]=3 : 5. Задачу решить двумя способами.

Решение. Первый способ основан на свойстве 4 инвариантного проецирования (п. 2.2.3). Проведем через проекции любой точки (в данном случае A) прямую под углом, отличным от 0° или 180°, на которой отложим (при помощи циркуля или линейки) по восемь равных частей (сумма числителя и знаменателя 3 + 5) (рис. 5.23*а*). Конечную точку 8 соединим с начальной точкой заданного отрезка — точкой B. Получим треугольник $AB8$. Через точку *3* проведем прямую, параллельную стороне $B8$. Точка пересечения прямой с отрезком AB будет точкой C — вершиной подобного треугольника $AC3$. На основании подобия треугольников можно утверждать, что [AC] : [CB]=3 : 5. Выполнив аналогичные построения на горизонтальной и фронтальной плоскостях проекций, получим проекции искомой точки C.

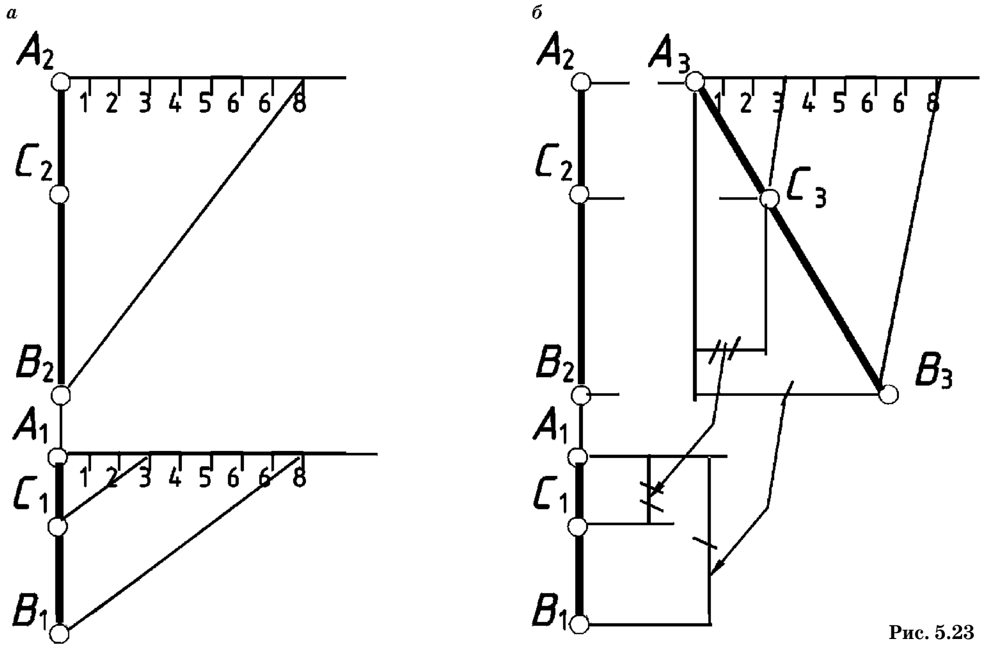


Рис. 5.23

Второй способ (рис. 5.23*б*): строим профильную проекцию отрезка AB и аналогично первому способу находим профильную проекцию точки C. Далее определяем (по известным методикам) горизонтальную и фронтальную проекции точки C.

Пример 14

Задание: определить недостающие проекции точек K и L (рис. 5.24), принадлежащих горизонтали [AB].

Решение: рассмотрим два способа решения данной задачи.

Первый способ (рис. 5.25*а*) основан на построении третьей проекции отрезка. На вертикальной линии связи показываем горизонтальную проекцию точки A. Профильная проекция ее самая левая, а значит, она самая

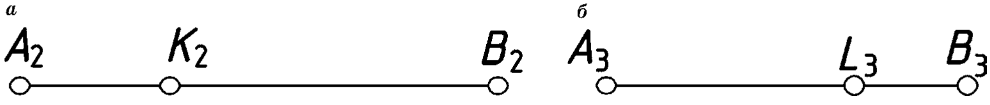


Рис. 5.24

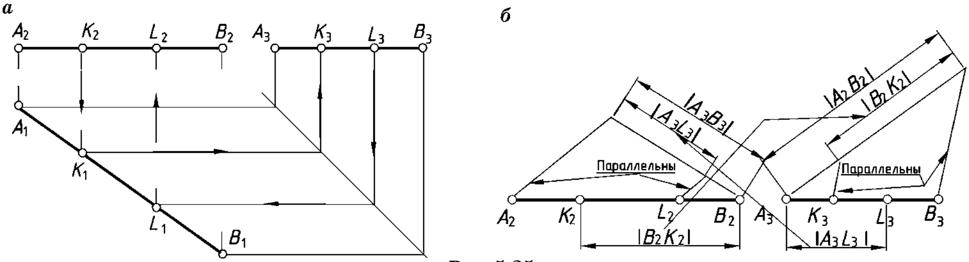


Рис. 5.25

дальняя по отношению к наблюдателю, и на горизонтальной проекции она будет самая высшая, а значит, все остальные точки на комплексном чертеже будут располагаться ниже. Далее проводим линию под углом 45° через точку пересечения горизонтальной и вертикальной линий, проведенных через проекции точек A_1 и A_3 соответственно.

Второй способ (рис. 5.25*б*) основан на построении пропорциональных отрезков путем построения подобных треугольников. Для построения профильной проекции точки K проведем линию, не совпадающую с профильной проекцией отрезка $[AB]$ — (A_3B_3). На этой прямой отложим отрезки, равные $|A_2B_2|$ и $|B_2K_2|$. Соединяем точку B_3 с конечной точкой отрезка $|A_2B_2|$. Затем параллельно полученной линии через точку отрезка $|B_2K_2|$ проводим еще одну линию. Точка пересечения последней с проекцией A_3B_3 и будет профильной проекцией точки K. Данное построение основано на пропорциональности сторон подобных треугольников. Аналогичным образом определяем фронтальную проекцию точки L.

5.6. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ЛИНИИ И ТОЧКИ

Точка может принадлежать линии (или линия проходит через точку). В противном случае точка не принадлежит линии (или находится вне линии), т. е. линия не проходит через точку (рис. 5.26).

Если формулировать признак принадлежности точки прямой в проекциях, то можно сказать, что точка принадлежит прямой, если все проекции точки принадлежат соответствующим проекциям прямой:

$$A_i \in a_i \Rightarrow A \in a.$$

На рисунке 5.26 показана точка A, принадлежащая прямой c:

$$A_1 \in c_1 \wedge A_2 \in c_2 \wedge A_3 \in c_3 \Rightarrow A \in a.$$

Так как для определения положения геометрического объекта в пространстве достаточно двух проекций, признак принадлежности точки прямой можно сформулировать следующим образом: необходимым и достаточ-

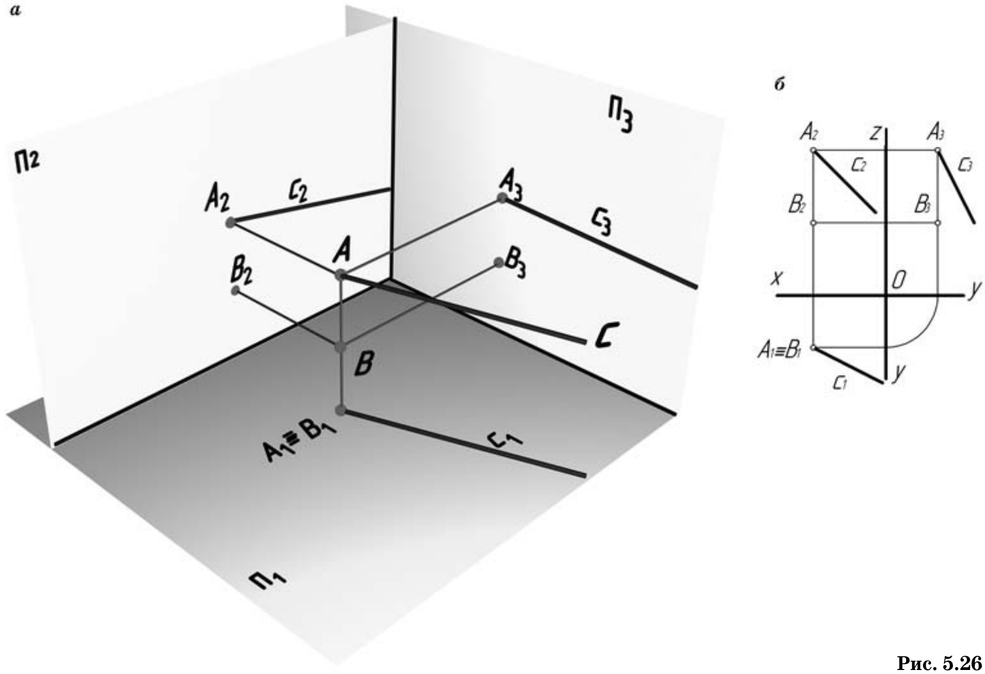


Рис. 5.26

ным условием принадлежности точки прямой является принадлежность двух проекций точек соответствующим проекциям прямой:

$$A_i \in a_i \Rightarrow A \in a \ (i = 1,\ 2).$$

Точка не принадлежит прямой, если хотя бы одна проекция точки не принадлежит проекции соответствующей прямой. На рисунке 5.26*б* показано, что горизонтальная проекция точки B конкурирует с точкой A, принадлежащей прямой c, т. е. принадлежит горизонтальной проекции прямой c. Однако две остальные проекции (фронтальная и профильная) не принадлежат соответствующим проекциям прямой c. Значит, точка B не принадлежит прямой c (рис. 5.26*а*):

$$B_1 \in c_1;\ \ B_2 \notin c_2;\ \ B_3 \notin c_3 \Rightarrow B \notin c.$$

5.7. ВЗАИМНОЕ ПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМЫХ

Прямые линии в пространстве могут пересекаться, если имеют одну общую точку. Если две прямые линии пересекаются в бесконечности (несобственная точка), то они параллельны. Если две прямые линии не имеют общей точки, то они скрещиваются.

На рисунке 5.27*а* показано наглядное изображение двух *пересекающихся прямых*. Как видно из рисунка 5.27, прямые c и b имеют лишь одну общую точку K, которая называется точкой пересечения.

На рисунке 5.27*б* показан эпюр двух пересекающихся прямых c и b в точке K. Анализируя данный комплексный чертеж, можно сформулиро-

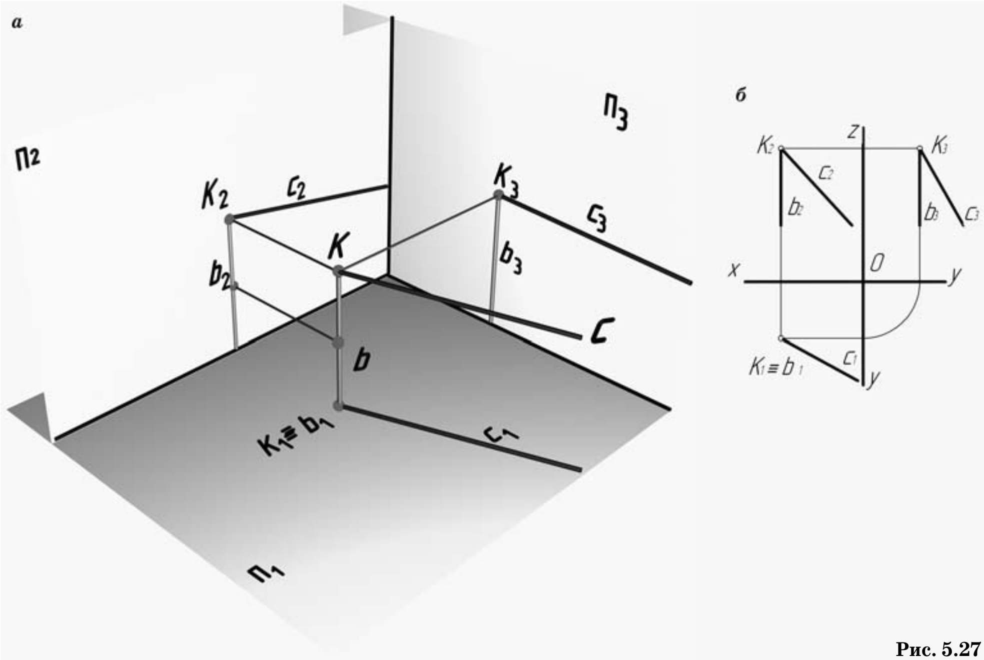


Рис. 5.27

вать признак пересекающихся прямых: **две пересекающиеся прямые имеют проекции только одной точки, принадлежащей обеим прямым:**

$$K_1 \in c_1 \wedge b_1;\;\; K_2 \in c_2 \wedge b_2;\;\; K_3 \in c_3 \wedge b_3 \in c \bigcap b.$$

Таким образом, две пересекающиеся прямые на комплексном чертеже имеют проекции:

а) пересекающихся прямых с проекциями общей точки пересечения (рис. 5.27, фронтальная и профильная проекции);

б) одна из проекций изображается как одна линия (рис. 5.27, горизонтальная проекция).

Две прямые a и b параллельны, если они пересекаются в бесконечности, т. е. имеют одну общую несобственную точку K^∞ (рис. 5.28).

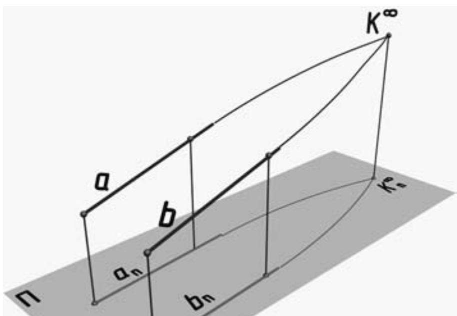


Рис. 5.28

На рисунке 5.29*а* показаны две параллельные прямые общего положения. Частный случай расположения прямых относительно плоскостей проекций, когда они располагаются в проецирующей плоскости. На рисунке 5.29*б* представлено наглядное изображение двух параллельных прямых a и b, расположенных в горизонтально проецирующей плоскости.

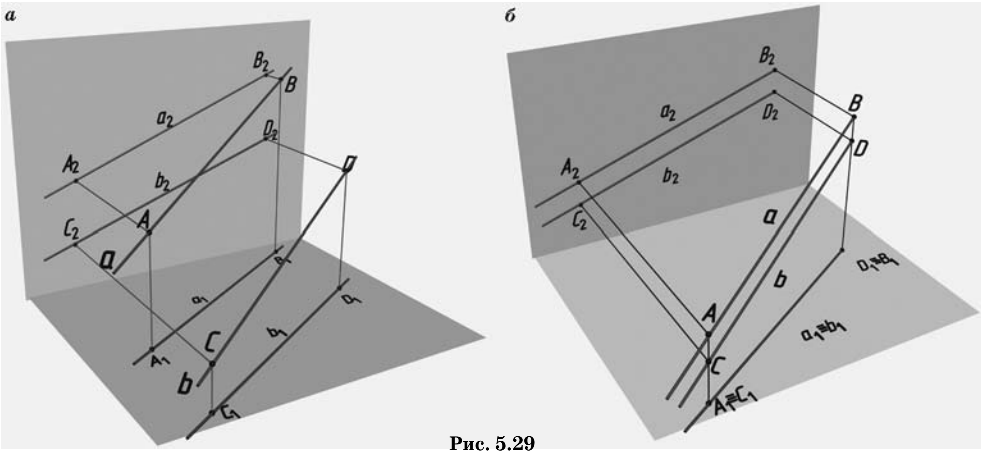


Рис. 5.29

На комплексном чертеже проекции двух параллельных прямых изображаются в виде:

а) параллельных проекций (рис. 5.30*а*);

б) параллельных проекций и одной проекции, на которой проекции конкурируют (рис. 5.30*б*):

$$a_1 \| b_1 \wedge a_2 \| b_2 \Rightarrow a \| b; \quad a_1 \equiv b_1 \wedge a_2 \| b_2 \wedge a \| b.$$

Скрещивающиеся прямые — это прямые, не имеющие общей точки. Однако их проекции могут выглядеть как пересекающиеся (рис. 5.31) или параллельные прямые (рис. 5.32). В первом случае точка пересечения является проекцией конкурирующих точек 1 и 2 (рис. 5.31).

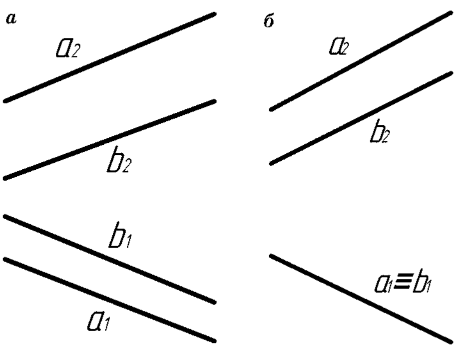


Рис. 5.30

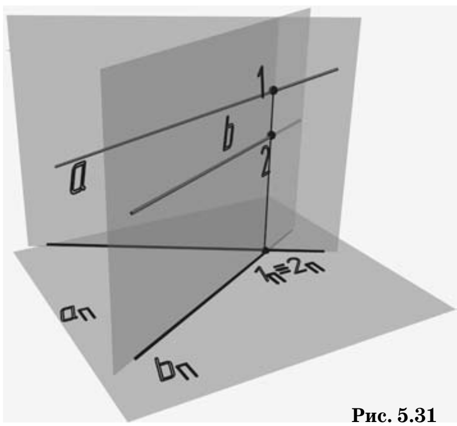


Рис. 5.31

$$(a \,\underline{\bigcirc}\, b) \Rightarrow (a_{\text{п}} \cap b_{\text{п}}) \vee (a_{\text{п}} \parallel b_{\text{п}}).$$

На комплексном чертеже в первом случае имеем две проекции пересекающихся в конкурирующих точках $1_2(2_2)$ и $3_1(4_1)$ прямых (рис. 5.33*а*). Во втором случае горизонтальные проекции параллельны, а фронтальные пересекаются в конкурирующих точках 1 и 2 (рис. 5.33*б*).

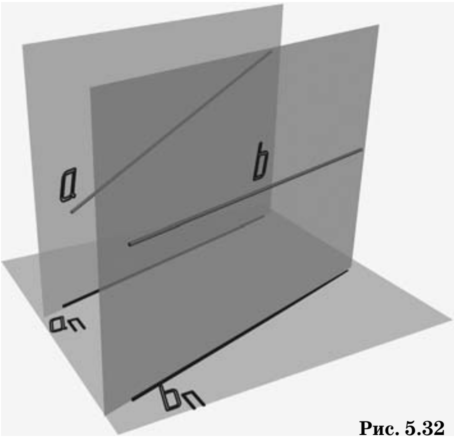


Рис. 5.32

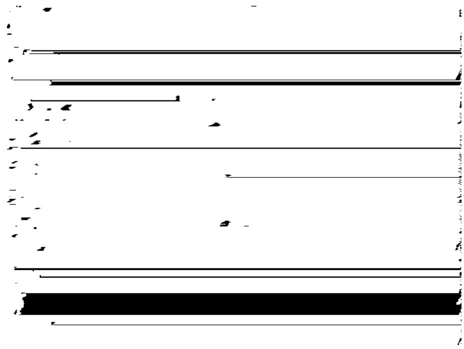


Рис. 5.33

Две скрещивающиеся прямые на комплексном чертеже могут изображаться:

а) в виде пересекающихся проекций (рис. 5.33*а*), у которых имеются две пары проекций конкурирующих точек (1(2) — точка 1 видимая, и 3(4) — точка 3 видимая);

б) одной проекцией в виде пересекающихся прямых с парой конкурирующих точек, а второй проекцией — в виде параллельных прямых (рис. 5.33*б*).

Пример 15

Задание: через точку K провести прямую m, пересекающую прямые a и b (рис. 5.34*а*).

Решение: прямая m должна иметь общие точки с прямыми a и b. Начинаем построение с горизонтальной плоскости проекций, так как прямая a — горизонтально проецирующая и точка пересечения (2) с прямой a будет совпадать с ее проекцией. Зная положение прямой m_1 по линиям связи точ-

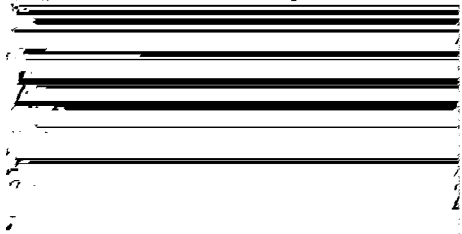


Рис. 5.34

ки 1_1, определяем 1_2 и строим фронтальную проекцию прямой *m* (рис. 5.34*б*) по точкам K_2 и 1_2.

Пример 16

Задание: определить расстояние между точкой *C* и прямой *a* (рис. 5.35*а*).

Решение: кратчайшее расстояние между точкой и прямой — перпендикуляр, опущенный из точки на прямую. Угол 90° проецируется в натуральную величину, если одна из его сторон параллельна плоскости проекций, а вторая не перпендикулярна ей (теорема о прямом угле, свойство 8, п. 2.2.3).

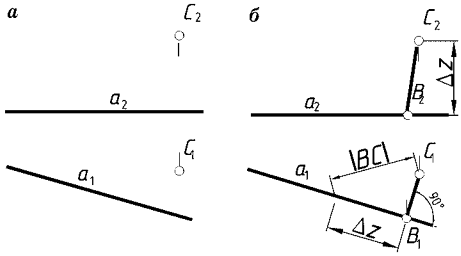


Рис. 5.35

Прямая *a* — горизонталь, так как ее фронтальная проекция горизонтальна (см. свойства горизонтали п. 5.5.1). Проекция перпендикуляра, опущенного из точки C_1 на прямую a_1, будет соответствовать натуральной величине угла 90°, так как прямая *a* параллельна горизонтальной плоскости. Фронтальную проекцию точки *B* определим по линии связи (рис. 5.35*б*).

Воспользуемся правилом прямоугольного треугольника (п. 5.4) и определим натуральную величину кратчайшего расстояния от точки *C* до прямой *a* — $|BC|$ (рис. 5.35*б*).

Пример 17

Задание: через точку *C* (рис. 5.36*а*) провести горизонталь *h* и фронталь *f*, пересекающие прямую *a*.

Решение: две прямые пересекаются, если они имеют общую точку. Точка принадлежит прямой, если все ее проекции принадлежат соответствующим проекциям прямой (*признак принадлежности точки прямой*). Построение фронтали и горизонтали начинаем с той проекции, положение которой относительно осей координат известно: для горизонтали — h_2 (параллельно оси *x*), для фронтали — f_1 (параллельно оси *x*).

По линиям связи находим проекции точек пересечения, принадлежащих обеим прямым уровня и прямой *a*: точка *D* для *h* и точка *B* для *f* (рис. 5.36*б*).

Соединяем соответствующие проекции точек пересечения с проекциями точки *C* и получаем искомые проекции горизонтали и фронтали.

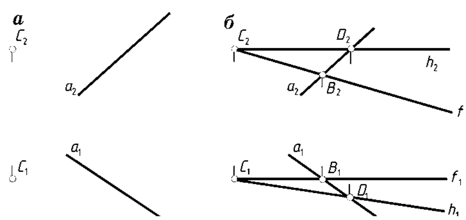


Рис. 5.36

Пример 18

Задание: провести фронталь f, пересекающую прямые m, l и отрезок $[AB]$ (рис. 5.37*а*).

Решение: положение горизонтальной проекции фронтальной прямой уровня может быть только горизонтально (п. 5.5.1). Эта проекция однозначно

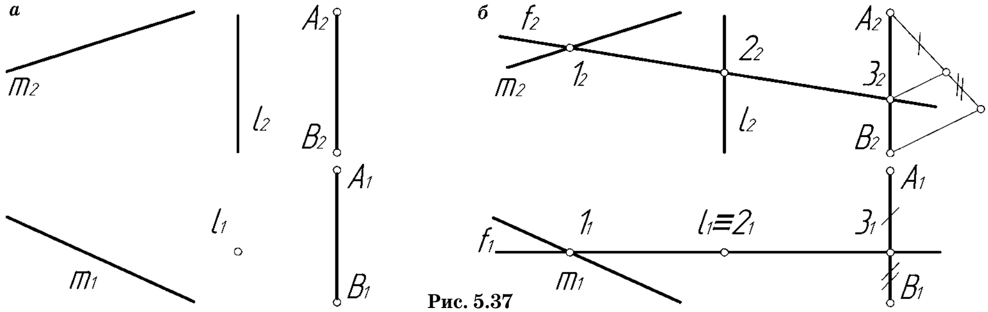


Рис. 5.37

должна проходить через проекцию прямой l в точке 2, т. е. через проекцию l_1 (рис. 5.37*б*). Далее по линии связи проекции точки 1_1 находим ее фронтальную проекцию — 1_2. Положение фронтальной проекции точки 2 (2_2) пока не известно. Ее определим после того, как проведем фронтальную проекцию фронтали f. Для этого определим фронтальную проекцию точки 3, построив подобные треугольники (см. пример 14). Соединяя точки 1_2 и 3_2, определяем положение точки 2_2.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Как изображается прямая общего положения, как она располагается по отношению к плоскостям проекций? Показать на примере.
2. Какие существуют прямые частного положения?
3. Дать определение натуральной величины отрезка общего положения и определить углы наклона его к плоскостям проекций методом прямоугольного треугольника.
4. Дать определение натуральной величины и определить углы наклона к плоскостям проекций:
   а) прямой уровня;
   б) проецирующей прямой.
5. Перечислить возможные случаи расположения прямых в пространстве и выполнить их комплексный чертеж.
6. Сформулировать признак принадлежности точки прямой.
7. Сформулировать признак пересечения прямых, описать их свойства, выполнить комплексный чертеж.
8. Сформулировать признак параллельности прямых, описать их свойства, выполнить комплексный чертеж.
9. Сформулировать признак скрещивающихся прямых, описать их свойства, выполнить комплексный чертеж.
10. Какое свойство прямых уровня является основным при решении задач начертательной геометрии?

6 ПОВЕРХНОСТИ, ПЛОСКОСТИ

Наиболее сложным объектом для построения изображения является поверхность и ее частный случай — плоскость. При этом необходимо рассмотреть взаимодействие поверхностей с другими объектами: точкой, прямой, поверхностью.

6.1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Все технические чертежи содержат проекции точек, линий и поверхностей, поэтому в начертательной геометрии необходимо рассматривать вопросы, связанные с изображениями поверхностей и способами их задания.

В начертательной геометрии поверхность может быть охарактеризована как совокупность всех последовательных положений образующей линии g вдоль неподвижных направляющих $\{d, \ldots\}$ линии g_j; указаний о характере перемещения g_j, при этом указания могут быть заданы также графически, в частности с помощью направляющей γ (рис. 6.1). Данный способ образования поверхности называется *кинематическим*. Существует каркасный способ задания поверхностей, когда поверхность задается в виде последовательного расположения линий d_i и ряда g_j, образующих сетку, или в виде последовательного положения узлов A_{ij} сетки:

$$1.\ g_j \parallel \gamma; \quad 2.\ g \subset A \subset d_i.$$

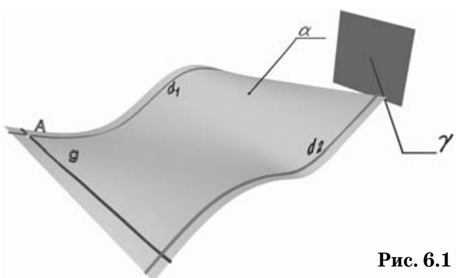


Рис. 6.1

Большое многообразие поверхностей, различные способы их формообразования, сложность геометрических характеристик создают трудности при попытках классифицировать поверхности, объединить их в систему.

Далее будут рассмотрены три типа поверхностей: плоскости, многогранники и поверхности вращения, наиболее часто встречающиеся в технике.

6.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЛОСКОСТИ

Если пользоваться приведенным выше определением поверхности, то плоскость можно рассматривать как совокупность всех последовательных положений прямой g вдоль двух параллельных или пересекающихся прямых d_1 и d_2. Если проецировать плоскость не перпендикулярно плоскости проекций, то проекции всех точек займут все поле чертежа (плоскость бесконечна).

Встает вопрос о способах задания плоскостей посредством минимального, но достаточного количества геометрических объектов, позволяющих решать позиционные и метрические задачи тем или иным способом. По отношению к плоскостям проекций плоскости могут занимать общее и частное положение.

6.3. СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ПЛОСКОСТИ НА КОМПЛЕКСНОМ ЧЕРТЕЖЕ

По аналогии с прямой линией плоскости по отношению к плоскостям проекций могут располагаться так:

а) произвольным образом — плоскости общего положения;

б) перпендикулярно (проецирующие плоскости) или параллельно плоскости проекций (плоскости уровня) — плоскости частного положения. Указанная классификация плоскостей по положению относительно плоскостей проекций имеет принципиальное значение.

6.3.1. ПЛОСКОСТИ ОБЩЕГО ПОЛОЖЕНИЯ

Из бесчисленного числа точек плоскости для ее однозначного определения на комплексном чертеже достаточно определить положение трех точек, принадлежащих плоскости и не лежащих на одной прямой (рис. 6.2*а*). Этого будет достаточно для решения задач начертательной геометрии.

Комплексный чертеж плоскости общего положения в виде проекций трех точек показан на рисунке 6.2*б*. Однако при решении той или иной задачи начертательной геометрии данный способ не всегда является рациональным и в зависимости от условия задачи его можно представить в другом виде.

Рассмотрим, какое сочетание простейших геометрических объектов (с точки зрения их построения) можно использовать для решения задач начертательной геометрии.

Наиболее распространенный способ задания плоскости общего положения — в виде треугольника (рис. 6.3). На рисунке 6.3*б* показан комплексный чертеж плоскости общего положения, заданной в виде треугольника

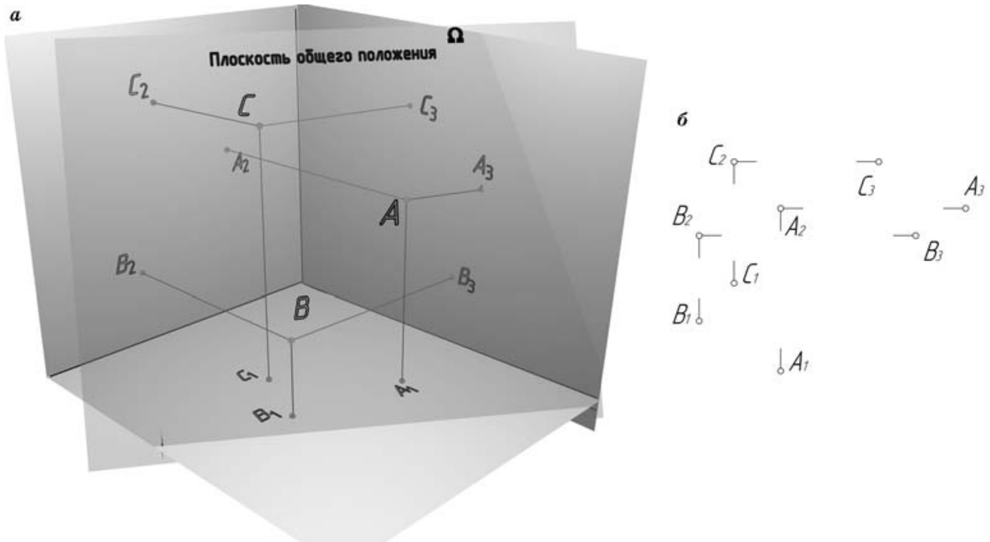


Рис. 6.2

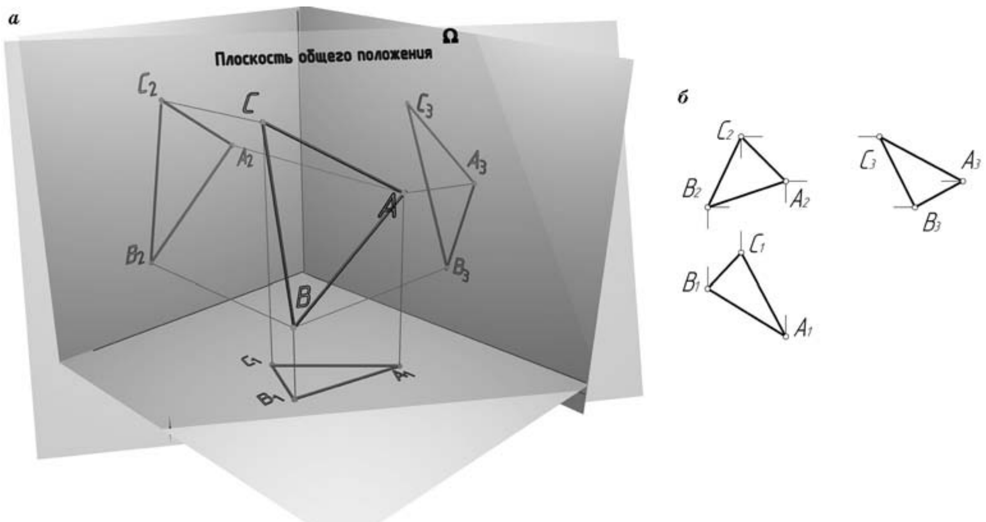


Рис. 6.3

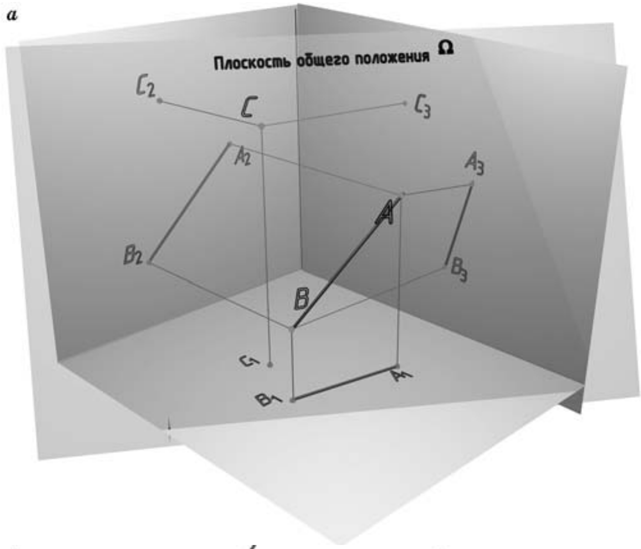
($\Omega(\Delta ABC)$). Следует отметить, что при этом способе задания точки, принадлежащие этой плоскости, находятся не только внутри треугольника, но и снаружи. Иными словами, мы должны видеть бесконечную плоскость.

Следующий способ задания плоскости можно получить, если две точки представить в виде одной прямой (отрезка прямой) (рис. 6.4).

Комплексный чертеж задания плоскости в виде отрезка и точки ($\Omega(C, [AB])$) показан на рисунке 6.4*б*.

Если через точку C провести прямую, параллельную отрезку $[AB]$, то тогда ту же плоскость можно определить посредством двух параллельных прямых (рис. 6.5).

а



б

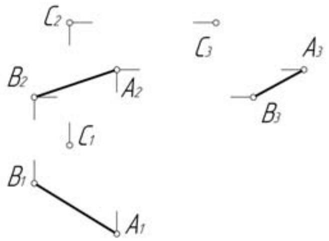
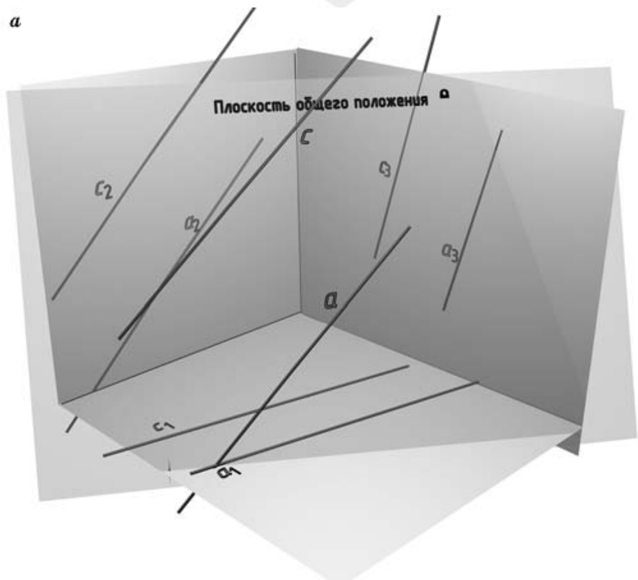


Рис. 6.4

а



б

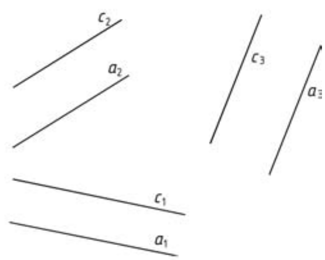


Рис. 6.5

На основании свойства 6 п. 2.2.3 (проекции параллельных прямых параллельны) комплексный чертеж плоскости общего положения выглядит как проекции параллельных прямых ($\Omega(a \| c)$) (рис. 6.5*б*).

Наконец, через три точки можно провести две пересекающиеся прямые (рис. 6.6*а*), которые будут являться еще одним способом задания плоскостей. Комплексный чертеж плоскости общего положения, заданной в виде двух пересекающихся прямых ($\Omega(a \cap b)$), показан на рисунке 6.6*б*.

Итак, мы рассмотрели четыре способа задания плоскости общего положения, основанных на проекциях трех точек. Именно эти четыре способа подчеркивают свойство плоскости как поверхности первого порядка, что

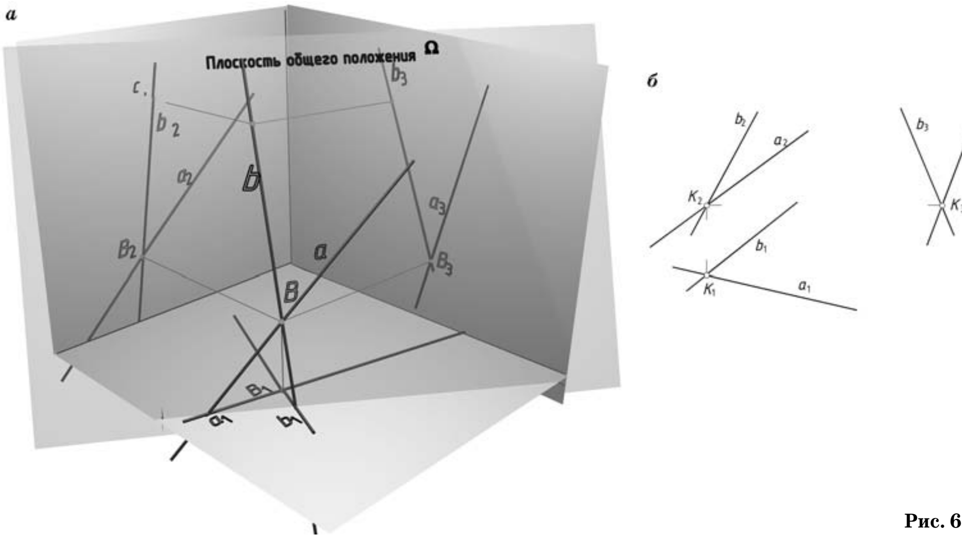


Рис. 6.6

определяется прямыми линиями. Когда мы задаем плоскость тремя точками, то обязательно должно быть пояснение, что это плоскость. В противном случае через три точки можно провести сколько угодно поверхностей, порядок которых будет выше первого.

Плоскости можно задавать на различных проекциях различными способами, как показано на рисунке 6.7, где горизонтальная проекция задана параллельными прямыми $\Omega_1(c_1 \| a_1)$, фронтальная — треугольником $\Omega_2(\Delta A_2B_2C_2)$ и профильная — отрезком прямой и точкой $\Omega_3(C_3, [A_3B_3])$.

Однако такого рода сочетание нескольких способов задания плоскостей практически не встречается.

Пример 19

Задание: построить три проекции плоскости общего положения $\Omega(a \cap b)$.

Решение: построим две проекции плоскостей (рис. 6.8). Так как у этих проекций только точка K будет зависеть от линии связи, то, изобразив горизонтальную и фронтальную проекции этой точки и проведя через них пару прямых, получим чертеж плоскости $\Omega(a \cap b)$.

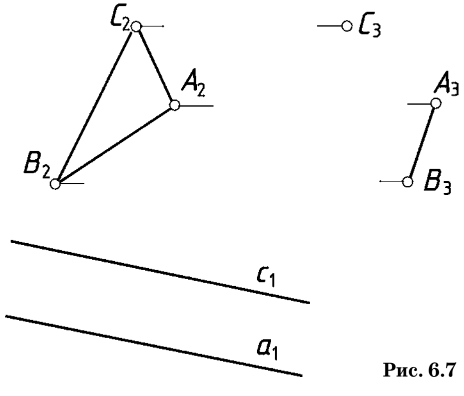


Рис. 6.7

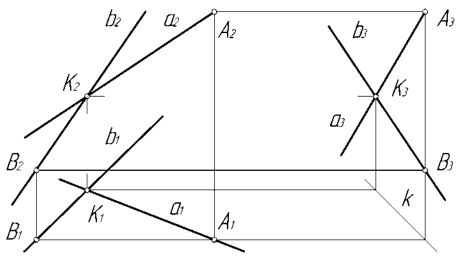


Рис. 6.8

Далее строим третьи проекции точек A и B, выбрав их таким образом, чтобы у этих точек были одинаковыми координаты y ($y_A = y_B$). Далее проводим постоянную прямую k через вершину ломаной линии K_3K_1 и определяем профильные проекции точек A и B.

6.3.2. ПЛОСКОСТИ ЧАСТНОГО ПОЛОЖЕНИЯ

Если плоскость расположена особым образом по отношению к плоскостям проекций (параллельно или перпендикулярно), то такие плоскости называют *плоскостями частного положения*. По аналогии с прямыми частного положения плоскости частного положения можно классифицировать на плоскости уровня и проецирующие плоскости.

Проецирующие плоскости. Плоскости, перпендикулярные плоскости проекций, называются проецирующими. Проекция на плоскость проек-

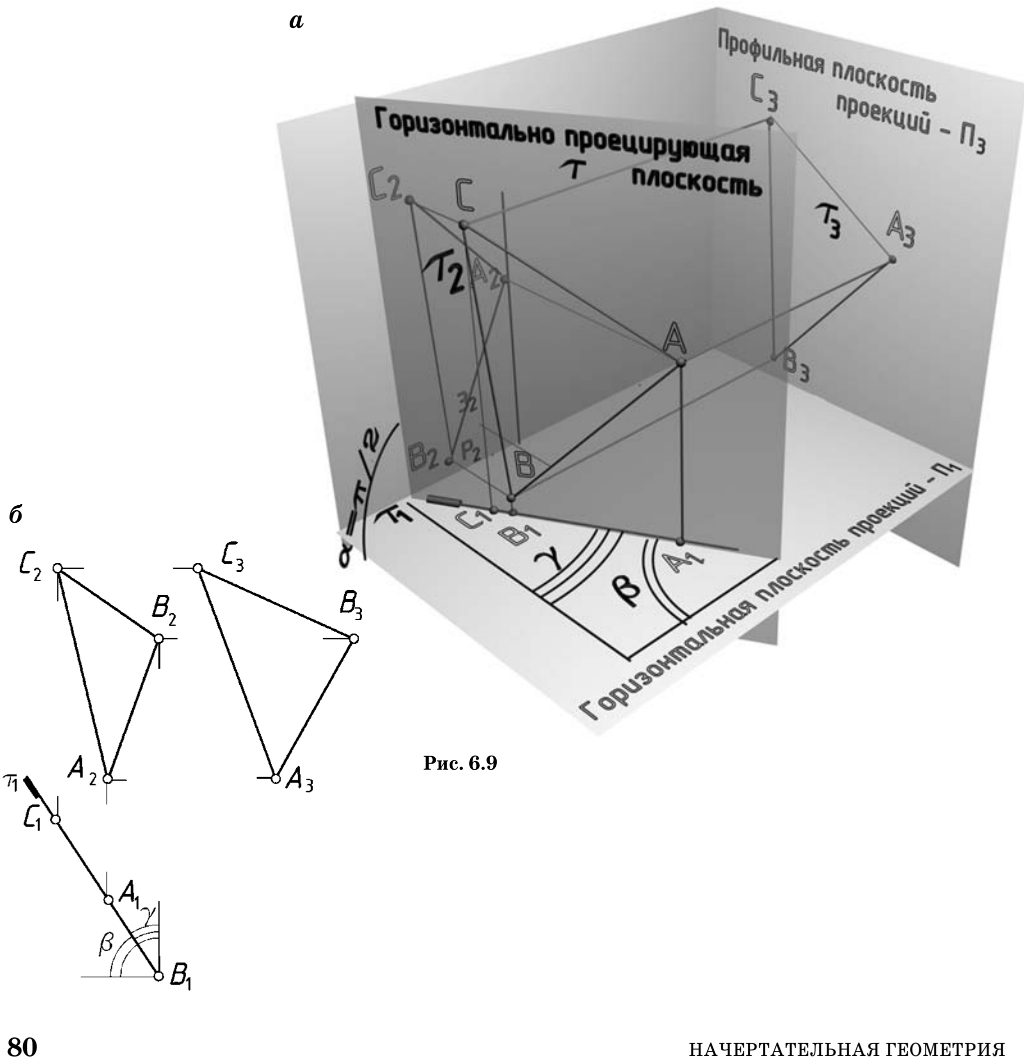


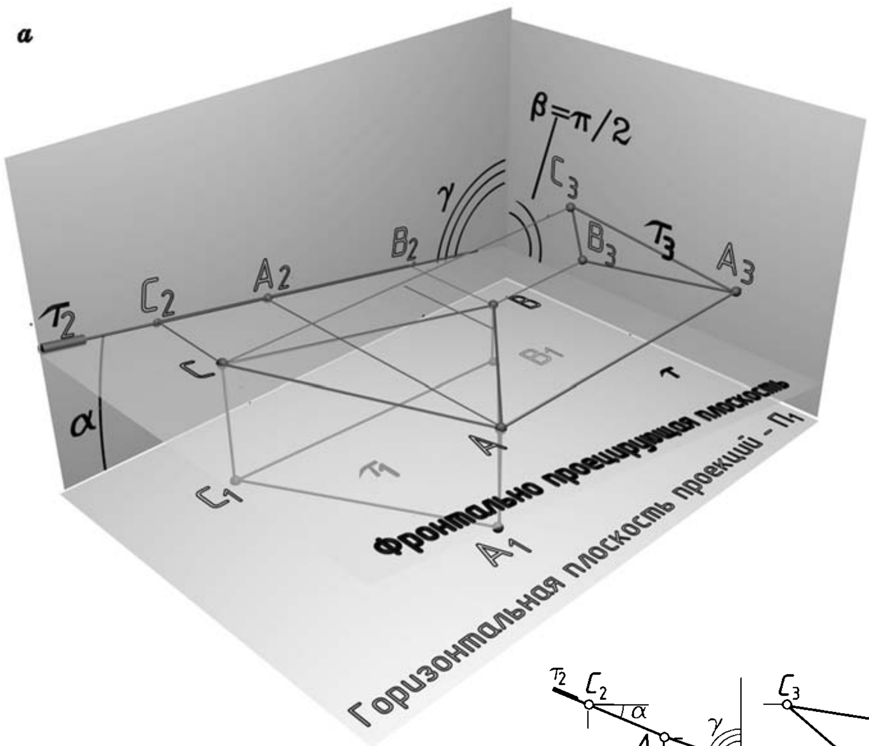
Рис. 6.9

ций, которой перпендикулярна плоскость, выглядит в виде прямой линии. Графическое обозначение такой проекции — часть линии (след плоскости), обычно изображается *утолщенно*.

Плоскость, перпендикулярная горизонтальной плоскости проекций, называется *горизонтально проецирующей плоскостью*. На рисунке 6.9 это $\tau(\Delta ABC)$, основными свойствами которой являются проекция на горизонтальную плоскость в виде прямой линии и возможность по горизонтальной проекции определить (без дополнительных построений) углы наклона к фронтальной и профильной плоскостям проекций β и γ соответственно.

Плоскость, перпендикулярная фронтальной плоскости проекций, называется *фронтально проецирующей плоскостью*. На рисунке 6.10*а* представлено наглядное изображение плоскости, перпендикулярной к фронтальной плоскости проекций — $\tau(\Delta ABC)$, основные свойства которой таковы: на фронтальную плоскость проекций она проецируется в прямую, по фрон-

а



б

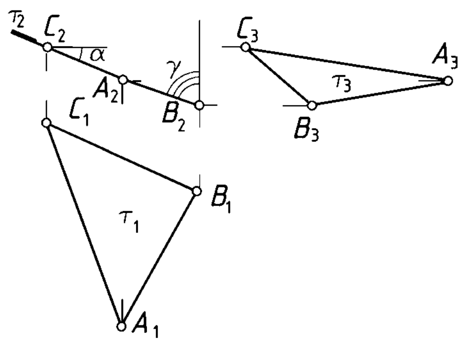
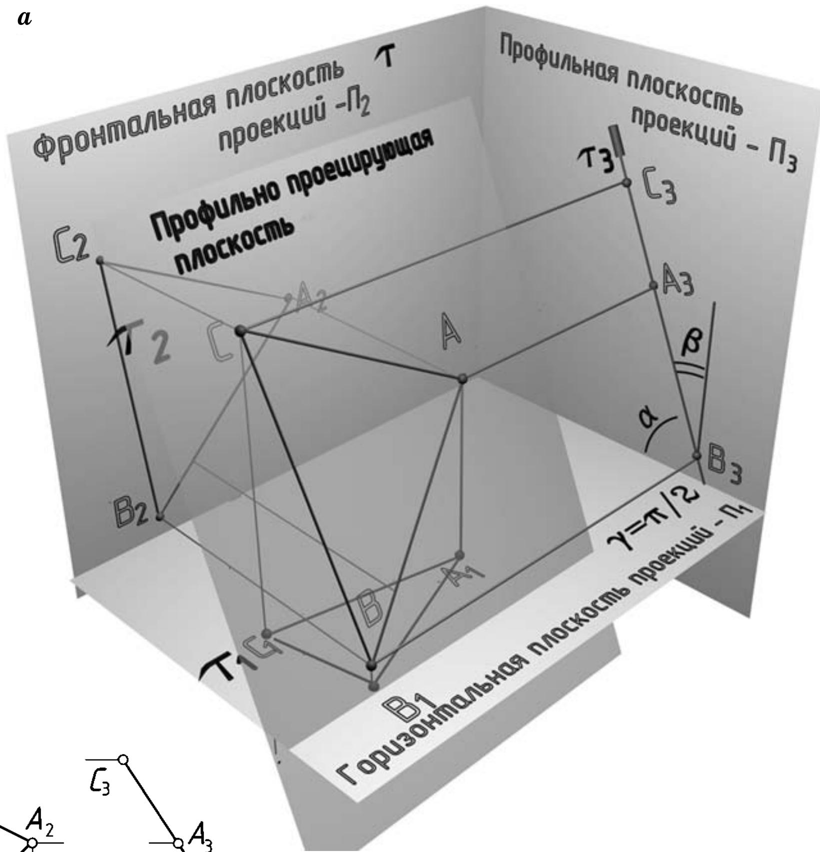


Рис. 6.10

тальной проекции плоскости можно определить (без дополнительных построений) углы наклона к горизонтальной и профильной плоскостям проекций α и γ. Комплексный чертеж фронтально проецирующей плоскости показан на рисунке 6.10*б*.

Плоскость, перпендикулярная профильной плоскости проекций, называется *профильно проецирующей плоскостью*, наглядное изображение которой представлено на рисунке 6.11 — τ(Δ*ABC*). Как видно из рисунка 6.11 (*б* — комплексный чертеж профильно проецирующей плоскости), плоскость имеет следующие основные свойства: на профильную плоскость

а



б

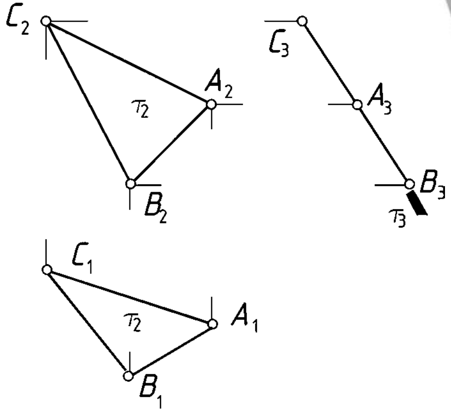


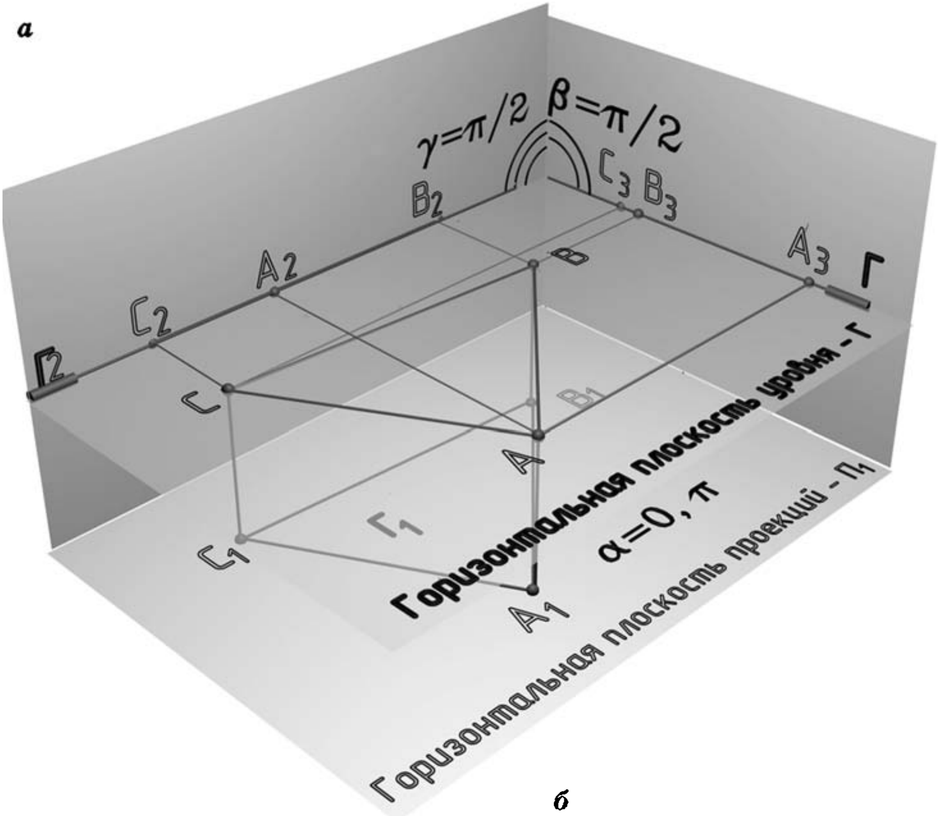
Рис. 6.11

проекций она проецируется в прямую линию (часть которой обычно изображается *утолщенно*), по профильной проекции можно определить (без дополнительных построений) углы наклона к фронтальной и горизонтальной плоскостям проекций α и β.

Плоскости уровня. Плоскость, параллельная плоскости проекций, называется *плоскостью уровня*. Плоскость проекций, которой параллельна плоскость уровня, дает название последней.

Горизонтальной плоскостью уровня называется плоскость, параллельная горизонтальной плоскости проекции (рис. 6.12*а*). Комплексный чертеж этой плоскости показан на рисунке 6.12*б*, она обозначена буквой греческого

а



б

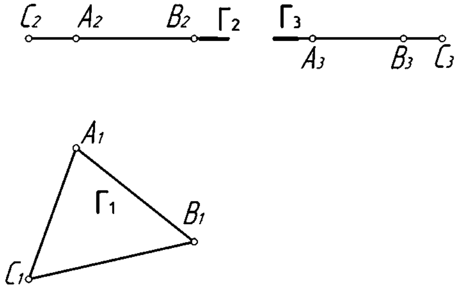
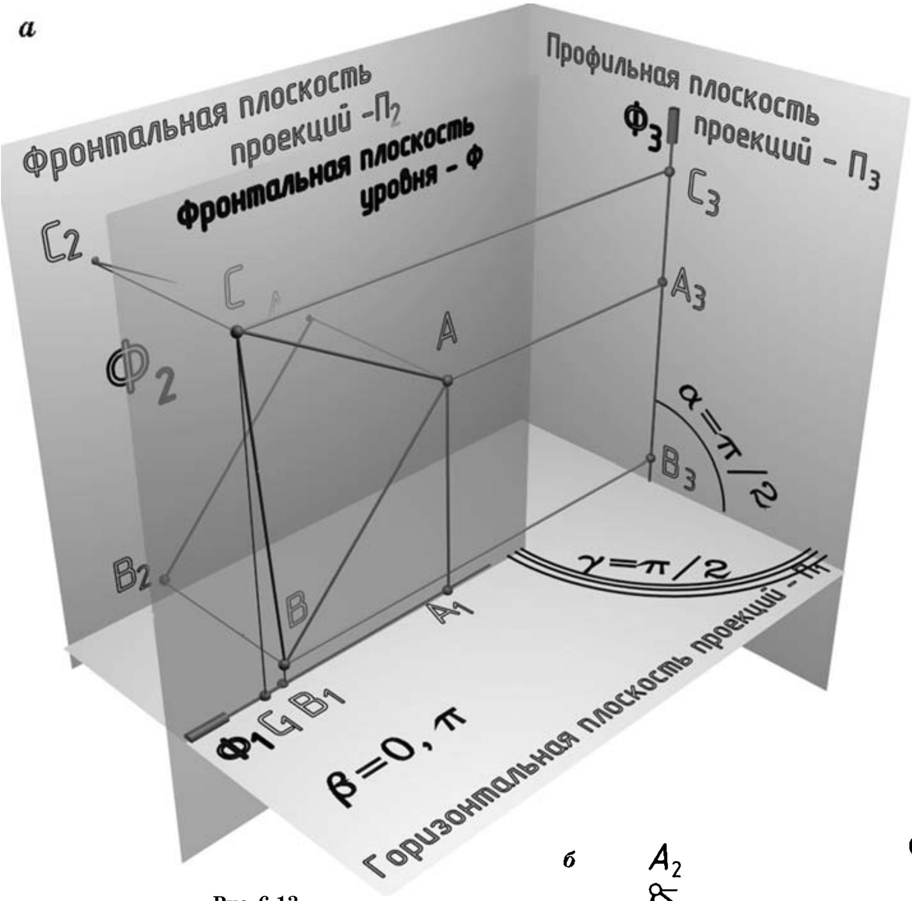


Рис. 6.12

алфавита *Г* и задана в виде треугольника *ABC*. Анализируя рисунок 6.12, можно сформулировать свойства такой плоскости: проекция горизонтальной плоскости уровня на фронтальную и профильную плоскости проекций изображается в виде прямой линии, а на горизонтальную плоскость проекций все фигуры, расположенные на горизонтальной плоскости уровня, будут проецироваться без искажения.

Фронтальная плоскость уровня (плоскость, параллельная фронтальной плоскости проекций) показана на рисунке 6.13 и обозначена Ф(ΔABC).



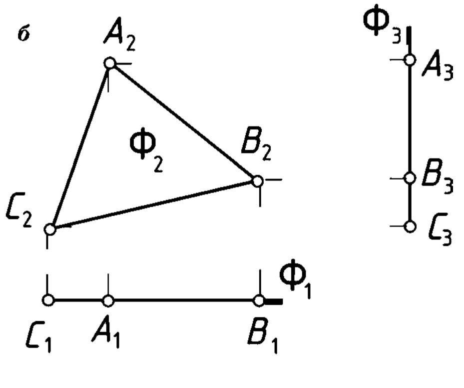
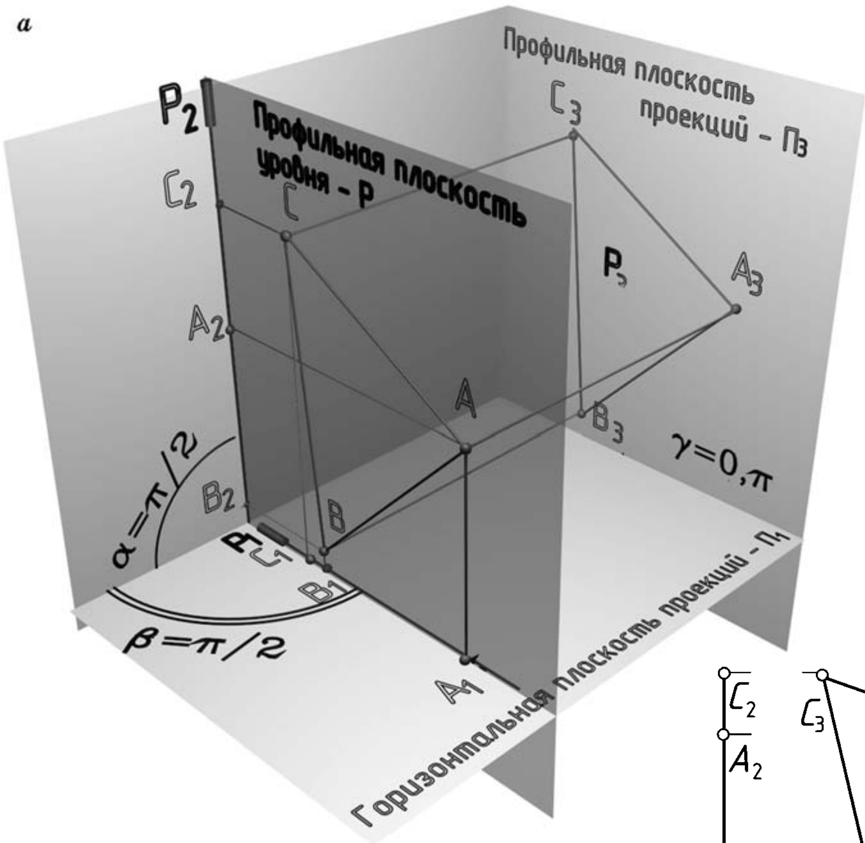


Рис. 6.13

Она обладает следующими свойствами: проекция на горизонтальную и профильную плоскости проекций изображается в виде прямой линии, все плоские фигуры, расположенные на фронтальной плоскости уровня, будут проецироваться на фронтальную плоскость проекций без искажения. На рисунке 6.13*а* показано наглядное изображение фронтальной плоскости уровня, а на рисунке 6.13*б* — ее комплексный чертеж.

Профильная плоскость уровня параллельна профильной плоскости проекций и показана на рисунке 6.14*а*, а на рисунке 6.14*б* приведен ее ком-



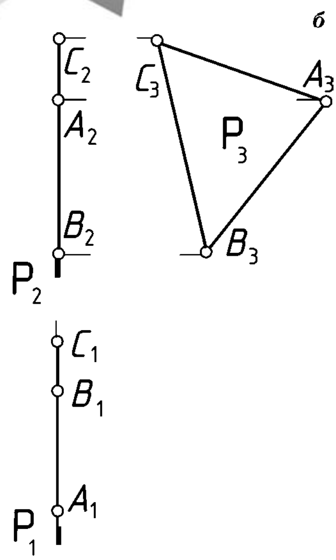


Рис. 6.14

плексный чертеж. Это $P(\Delta ABC)$. Свойства: проекция профильной плоскости уровня на горизонтальную и фронтальную плоскости проекций изображается в виде прямой линии, а на профильную плоскость проекций все фигуры, расположенные на профильной плоскости уровня, будут проецироваться без искажения.

Понятия плоскостей частного положения имеют большое значение при дальнейшем изучении курса «Начертательная геометрия», в частности при определении линии пересечения поверхностей с помощью поверхностей-посредников.

6.4. ПРИЗНАК ПРИНАДЛЕЖНОСТИ ТОЧКИ И ПРЯМОЙ ПЛОСКОСТИ

Признак принадлежности точки прямой был рассмотрен выше (свойство 1 евклидова пространства). Выбрать точку в плоскости, принадлежащей данной плоскости, произвольно, не связывая ее с другими элементами плоскости, невозможно. Точка в плоскости выбирается исходя из условия, что она находится на прямой линии этой плоскости. Так как все точки прямой, принадлежащей плоскости, принадлежат этой же плоскости, то решение задачи о принадлежности точки плоскости сводится к определению принадлежности прямой плоскости. Иными словами, признак принадлежности точки плоскости можно сформулировать следующим образом: **точка принадлежит плоскости, если она принадлежит прямой, принадлежащей плоскости.** Или: **точка принадлежит плоскости, если ее проекции принадлежат проекциям прямой, принадлежащей проекциям плоскости.** На рисунке 6.15*а* показан комплексный чертеж, из которого можно видеть, что точка A принадлежит прямой a, а точка B — прямой b на основе принадлежности соответствующих проекций:

$$A_1 \in a_1 \wedge A_2 \in a_2 \Rightarrow A \in a;$$
$$B_1 \in b_1 \wedge B_2 \in b_2 \Rightarrow B \in b.$$

Поскольку для определения положения прямой достаточно знать положение двух точек, принадлежащих прямой, то признак принадлежности прямой плоскости можно сформулировать так: **если две точки прямой принадлежат плоскости, то и прямая принадлежит плоскости** (рис. 6.15*б*). Значит, если проекции двух точек прямой принадлежат проекциям точек плоскости, то прямая принадлежит плоскости. Для прямых c и d на рисунке 6.15*б*:

$$1 \in d \wedge b \wedge 2 \in a \wedge d \Rightarrow d \in \Omega(a \cap b);$$
$$4 \in c \wedge b \wedge 3 \in a \wedge c \Rightarrow c \in \Omega(a \cap b).$$

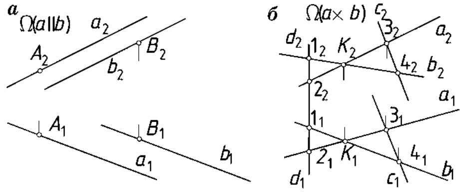


Рис. 6.15

Пример 20

Задание: построить проекции прямой a, принадлежащей ΔABC (рис. 6.16).

Решение: на любой из проекций проводим прямую a. В данном случае на горизонтальной проекции (рис. 6.17). По линиям связи определяем положение фронтальных проекций точек: 1 — на стороне AC треугольника и 2 — BC.

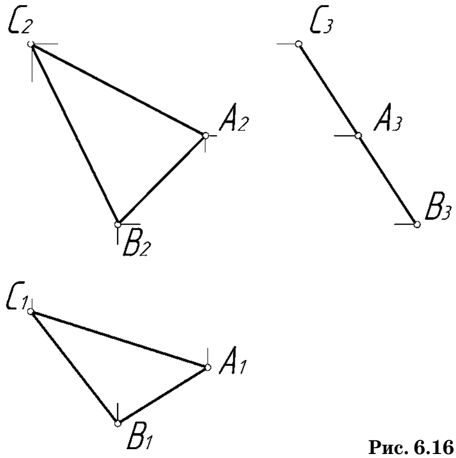


Рис. 6.16

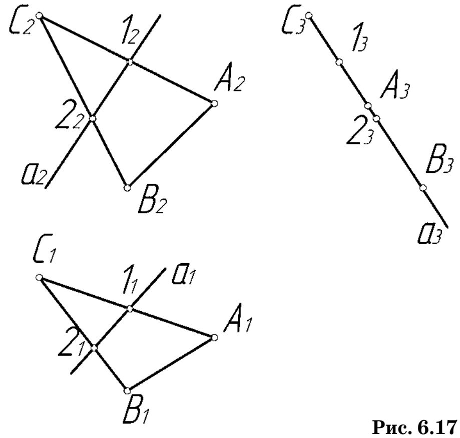


Рис. 6.17

Так как на профильной проекции треугольник спроецировался в виде отрезка прямой линии (профильно проецирующаяся плоскость), проекции любой линии, принадлежащей плоскости, будут лежать на этой прямой.

Здесь же и будет располагаться третья проекция прямой линии, поэтому отпадает необходимость нахождения профильных проекций точек 1 и 2.

6.5. ПРИЗНАК ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ

Прямая параллельна плоскости, если она параллельна прямой, принадлежащей плоскости. Для комплексного чертежа признак параллельности прямой и плоскости таков: **если проекции прямой параллельны соответствующим проекциям другой прямой, принадлежащей плоскости, то прямая параллельна плоскости.** На рисунке 6.18 прямая d параллельна плоскости $\Omega(A, [BC])$:

$$d_2 \| B_2C_2 \wedge d_1 \| B_1C_1 \Rightarrow d \| BC \Rightarrow d \| \Omega(A, [BC]).$$

Для проецирующей плоскости признак параллельности можно сформулировать следующим образом: **если проекция прямой параллельна проецирующей плоскости, проекция которой изображается в виде прямой линии, то прямая параллельна плоскости.** Таким образом, в данном случае достаточно лишь удовлетворить условие параллельности для той проекции, относительно которой заданная плоскость перпендикулярна. На рисунке 6.19

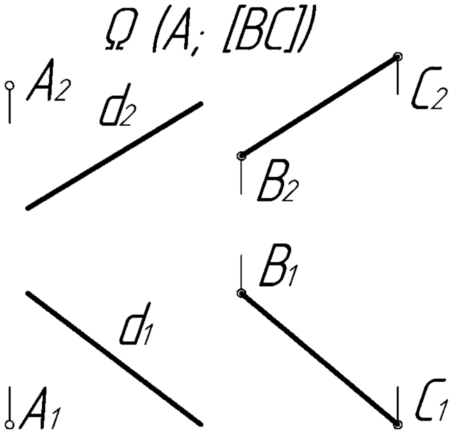


Рис. 6.18

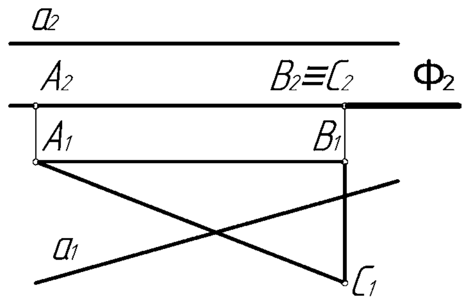


Рис. 6.19

показан комплексный чертеж для прямой, параллельной фронтально проецирующей плоскости:

$$a_2 \| \Phi_2 \Rightarrow a \| \Phi.$$

Пример 21

Задание: построить фронтальную проекцию отрезка BC, параллельного плоскости $\Omega(a \cap b)$ (рис. 6.20). Определить видимость отрезка.

Решение: на рисунке 6.21 показано решение данной задачи. На основании признака параллельности прямой и плоскости необходимо провести проекции прямой, параллельной любой прямой в плоскости. При решении задачи достаточно в плоскости $\Omega(a \cap b)$ провести прямую, параллельную горизонтальной проекции отрезка BC. Затем определить фронтальную проекцию этой прямой, параллельно которой по линии связи определить фронтальную проекцию отрезка BC. После определения видимости задача будет считаться решенной.

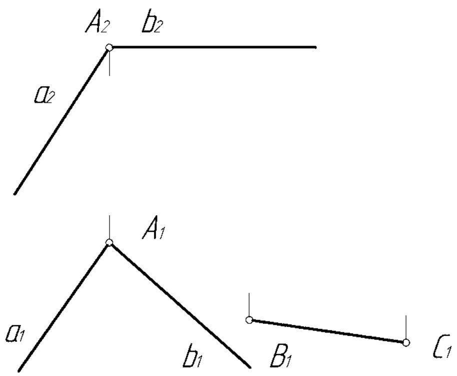


Рис. 6.20

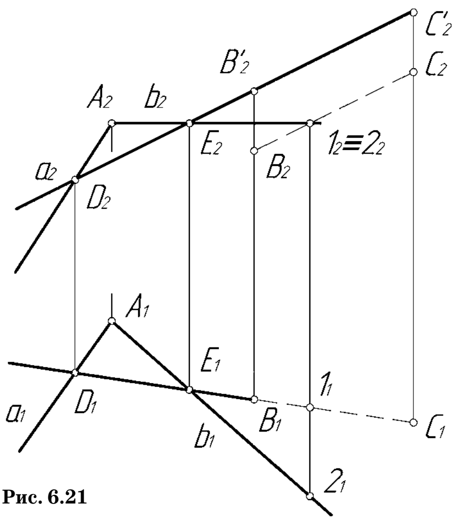


Рис. 6.21

На рисунке 6.21 горизонтальная проекция прямой, принадлежащей плоскости $\Omega(a \cap b)$, конкурирует с отрезком BC. По линиям связи точек D и E определяем фронтальную проекцию прямой, принадлежащей плоскости. Далее параллельно (по линиям связи) откладываем фронтальную проекцию отрезка BC. Фронтальная проекция отрезка BC будет принадлежать фронтальной проекции плоскости, поэтому и сам отрезок кажется принадлежащим плоскости, что будет не верным решением.

Видимость определяем по конкурирующим точкам. Для этого удлиним проекции прямой b до пересечения с фронтальной проекцией отрезка BC. Точку 2 отметим на прямой b, а точку 1 — на отрезке BC. По горизонтальной проекции определим, что на фронтальной проекции видима точка 2, принадлежащая плоскости, а это значит, что отрезок будет невидимым, т. е. находится под плоскостью. Поэтому проекцию отрезка B_2C_2 показываем невидимой. Понятно, что и горизонтальная проекция отрезка тоже будет невидимой.

6.6. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ

Признаком пересечения прямой и плоскости служит наличие одной общей точки. Определение точки пересечения прямой и плоскости является позиционной задачей определения взаимного положения прямой и плоскости и включает не только определение точки пересечения, но и определение видимости участков прямой. Решение данной задачи используется и в других задачах: определение линии пересечения плоскостей, определение линии пересечения многогранников с плоскостью, определение линии пересечения многогранников.

Существует много способов определения точки пересечения прямой и плоскости. Здесь рассмотрим случаи:

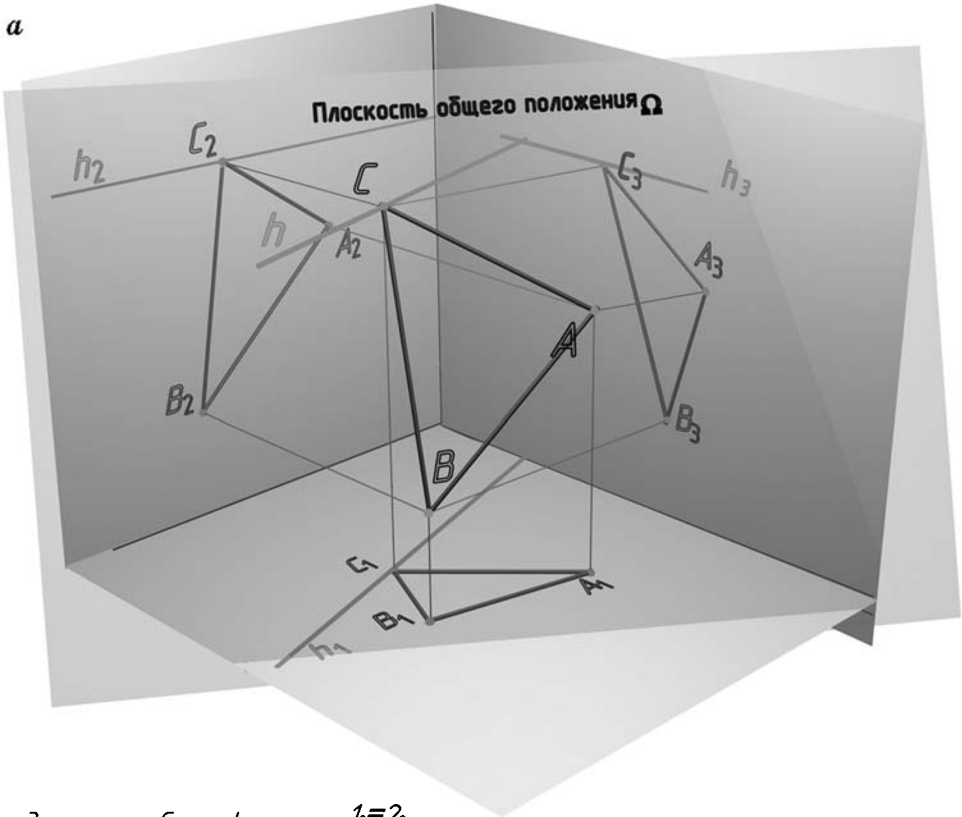
а) когда общая точка определяется непосредственно из чертежа (без дополнительных построений);

б) способ посредников — проецирующей плоскости, конкурирующей прямой.

6.6.1. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТОЧКИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ

Прямая, имеющая одну общую точку с плоскостью, пересекает ее в этой точке. На рисунке 6.22*а* показано наглядное изображение прямой h, пересекающей плоскость общего положения $\Omega(\Delta ABC)$ в точке C. На комплексном чертеже (рис. 6.22б) видно, что эта прямая имеет одну общую точку с плоскостью (точка C). В данном случае необходимо убедиться, что второй общей точки не существует, иначе прямая будет принадлежать плоскости. Для этого на горизонтали (прямая h) обозначим точку 2, фронтально конкурирующую с точкой, принадлежащей стороне треугольника AB — точка 1, и убедимся, что точка 2 не принадлежит стороне AB, а значит и самой плоскости, заданной в виде треугольника.

а



б

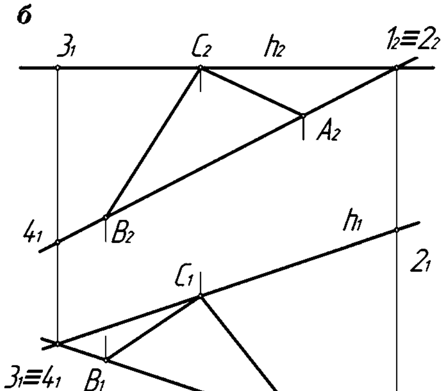


Рис. 6.22

Видимость участков прямой (рис. 6.22*а*) определим при помощи конкурирующих точек. Для определения видимости на фронтальной плоскости проекций необходимо определить, какая из конкурирующих точек будет ближе к наблюдателю, а значит, видима. Для этой цели проведем дополнительные построения на комплексном чертеже (рис. 6.22*б*). Точка 1 принадлежит прямой AB (горизонтальная проекция находится на пересечении продолжения прямой A_1B_1 и линии связи). Точка 2 принадлежит горизонтали h. Причем последняя будет дальше (см. горизонтальную проекцию), а значит, на фронтальной проекции она не будет видна. Отсюда участок прямой, находящийся левее точки C, будет видимым. Для определения видимости на горизонтальной проекции выполнены дополнительные построения. Две конкурирующие точки — 3 и 4, причем точка 3 выше (см. фронтальную проекцию), а значит, на горизонтальной проекции участок прямой h, которому принадлежит точка 3, будет видимым (рис. 6.22*б*).

Пересечение горизонтально проецирующей плоскости τ с прямой l показано на рисунке 6.23. Точка пересечения определяется по горизонтальной проекции, причем на этой проекции как левая, так и правая часть прямой видна. Для определения видимости на фронтальной плоскости проекций

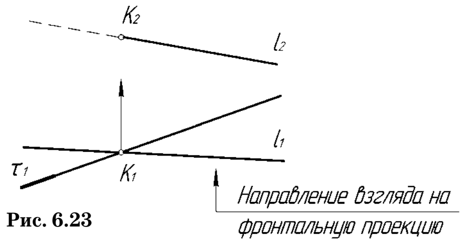


Рис. 6.23

покажем направление взгляда (рис. 6.23) и определим, что в том месте, где показана стрелка, ближе находится проекция прямой, а за ней — проекция плоскости τ, а значит, на фронтальной проекции сначала видим прямую (сплошная линия до точки пересечения), а за ней плоскость.

Пересечение проецирующей плоскости с отрезком прямой показано на рисунке 6.24.

Точка пересечения определяется по горизонтальной проекции.

Для определения фронтальной проекции точки пересечения отрезка AB с плоскостью необходимо воспользоваться свойством 4 (см. п. 2.2.3), а именно

$$\frac{A_1K_1}{K_1B_1} = \frac{A_2K_2}{K_2B_2}.$$

Проведем графические построения, соответствующие приведенной пропорции. От фронтальной проекции точки A отложим отрезок A_2B_1', равный отрезку проекции A_1B_1 (под любым углом, отличным от 0° или 180°). На этом же отрезке отложим $A_2K_1' = A_1K_1$. Со-

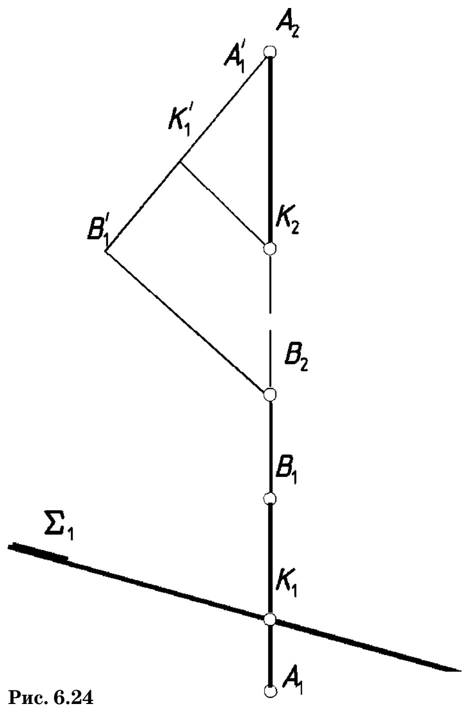


Рис. 6.24

единим точку B_2 с точкой B_1' и параллельно полученной линии из точки K_1' проведем линию. Тем самым мы построим два подобных треугольника $\vartriangle A_2K_2K_1'$ и $\vartriangle A_2B_2B_1'$. Из подобия треугольников вытекает пропорция

$$\frac{A_1K_1}{K_1B_1}=\frac{A_2K_2}{K_2B_2}.$$

Так как точка A является ближайшей, то на фронтальной проекции она будет видна, т. е. участок A_2K_2 будет видимым. Точка A ближе точки K (см. горизонтальную проекцию), а значит, на фронтальной плоскости проекций этот участок будет видимым.

Пример 22

Задание: определить точку пересечения прямой a с плоскостью τ $(c \cap b)$ (рис. 6.25*а*). Показать видимость проекций.

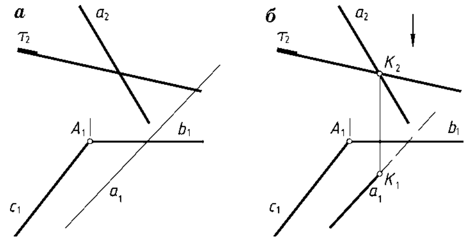


Рис. 6.25

Решение: точку пересечения определяем по фронтальной проекции — K_2 (рис. 6.25*б*). По линии связи определяем горизонтальную проекцию — K_1. На фронтальной проекции прямая a видна как сверху, так и снизу плоскости. Для определения видимости на горизонтальной плоскости проекций нет необходимости использовать конкурирующие точки — достаточно посмотреть по направлению взгляда на горизонтальную плоскость проекций и увидим, в каком месте плоскость τ закрывает прямую a.

6.6.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТОЧКИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ПРЯМОЙ С ПЛОСКОСТЬЮ СПОСОБОМ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

Задача определения пересечения прямой с плоскостью общего положения сводится к определению точки пересечения прямой со вспомогательной поверхностью. Эта задача может быть решена способом посредников или способом замены плоскостей проекций, который будет рассматриваться далее.

Способ вспомогательных поверхностей для определения пересечения поверхностей или пересечения поверхностей с прямой линией состоит в том, что для определения линии пересечения поверхностей или точек пересечения поверхности с прямой линией необходимо ввести вспомогательную поверхность (поверхность-посредник) таким образом, чтобы проекция линии пересечения с поверхностями была простейшей (по построению) — это прямая или окружность. В качестве поверхностей-посредников можно выбрать плоскость, сферу, конус и т. д. Затем необходимо определить общие точки для пересекающихся поверхностей и поверхностей-посредников, которые будут принадлежать точкам пересечения поверхностей или прямой и поверхности.

Для определения точки пересечения прямой с плоскостью в качестве поверхности-посредника выбираем проецирующую плоскость, которая пересекает плоскость по прямой линии.

На рисунке 6.26 показано наглядное изображение определения точки пересечения с помощью плоскости-посредника. Как видим из рисунка, в качестве плоскости-посредника была выбрана горизонтально проецирующая плоскость τ, которой принадлежит прямая l. В результате такого выбора плоскости τ горизонтальная проекция линии пересечения a этой плоскости и плоскости $\Omega(\Delta ABC)$ и проекция прямой l совпадут.

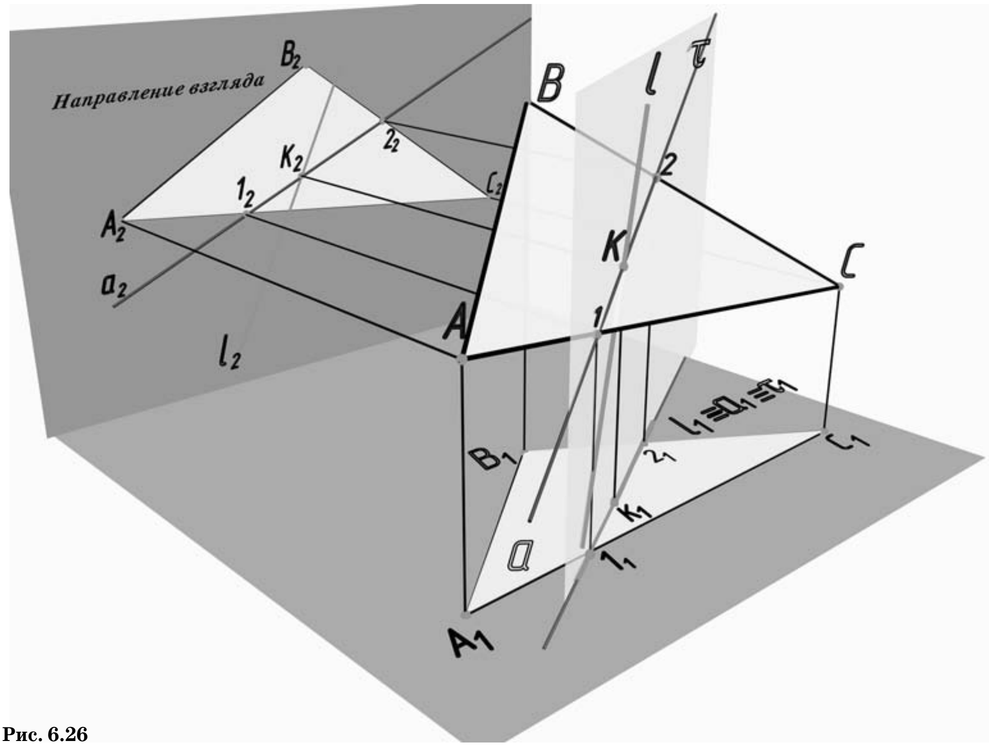
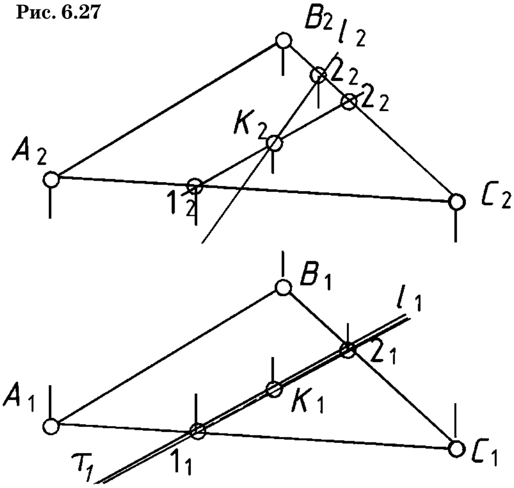


Рис. 6.26

Таким образом, дополнительную плоскость τ можно задать двумя пересекающимися прямыми: прямая l и отрезок 12 (пересечение $\tau(l \cap [12])$ и $\Omega(\Delta ABC)$). Точка пересечения K является общей точкой, принадлежащей трем геометрическим объектам: двум плоскостям τ $(l \cap [12])$, $\Omega(\Delta ABC)$ и прямой l.

Отсюда вывод: точка K есть точка пересечения прямой l и плоскости $\Omega(\Delta ABC)$. Однако на горизонтальной проекции определить положение искомой точки нельзя. Поэтому необходимо достроить фронтальную проекцию плоскости $\tau(l \cap [12])$ или показать проекцию отрезка [12]. Определив проекцию точки пересечения проекций l и отрезка [12], можно показать горизонтальную проекцию точки пересечения (K_1) (рис. 6.27).

Рис. 6.27



Видимость участков прямой определяем по конкурирующим точкам: на горизонтальной проекции по точкам 1 и 3 по направлению взгляда, на фронтальной проекции видим сначала проекцию 1_2, а затем проекцию 3_2 (рис. 6.28, 6.29). Первая точка принадлежит стороне треугольника AC, а значит, на этом участке горизонтальная проекция прямой не будет видна. На этой проекции видимость показана как для плоской фигуры, т. е. треугольника, поэтому прямую не будет видно там, где треугольник закрывает прямую. Для определения видимости на фронтальной плоскости проекций рассмотрим конкурирующие точки 5 и 4, из которых точка 5 ближе и принадлежит прямой a. Таким образом, участок на котором расположена точка 5, будет видимым.

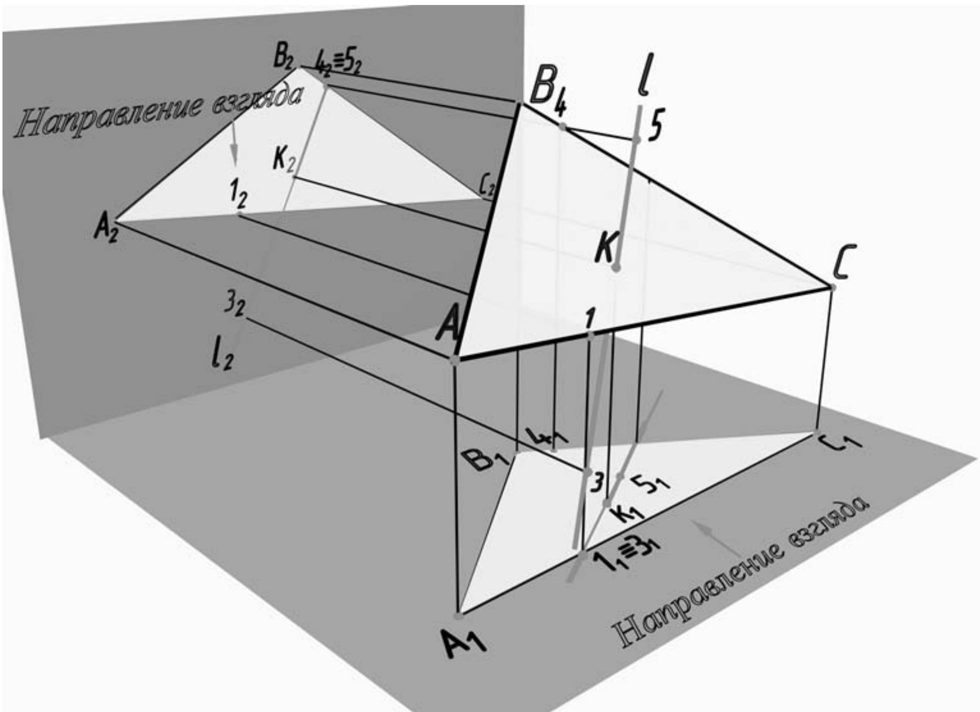


Рис. 6.28

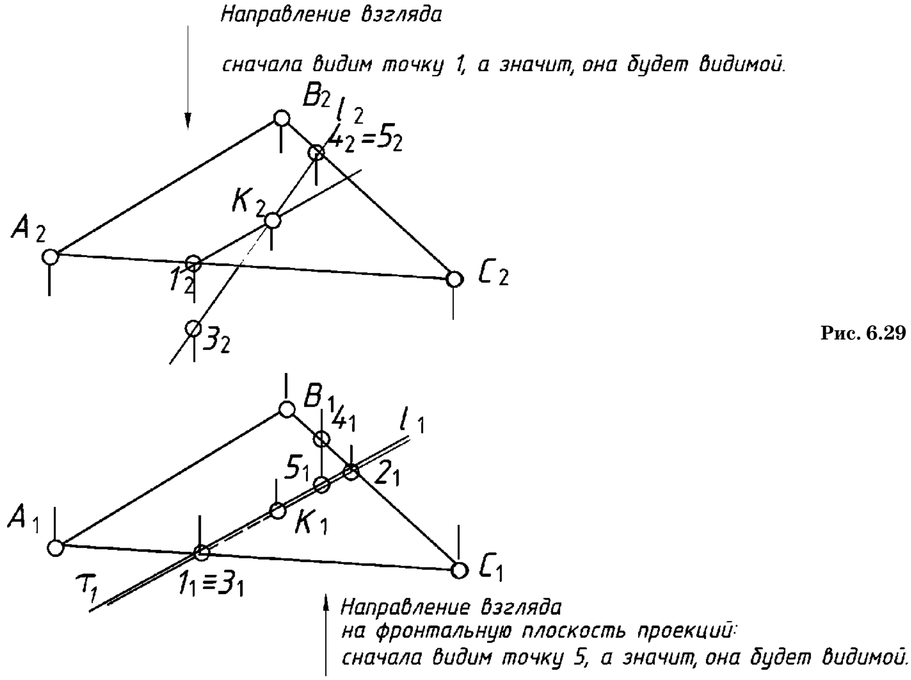


Рис. 6.29

Пример 23

Задание: определить точку пересечения прямой и плоскости (рис. 6.30).

Решение задачи по определению точки пересечения прямой с плоскостью показано на рисунке 6.30. В качестве вспомогательной плоскости выбрана фронтально проецирующая плоскость τ, которая пересечет плоскость $\Omega(\Delta ABC)$ по прямой 12. Точкой пересечения прямой a и плоскости $\Omega(\Delta ABC)$ будет точка K, так как она будет принадлежать обеим плоскостям и прямой.

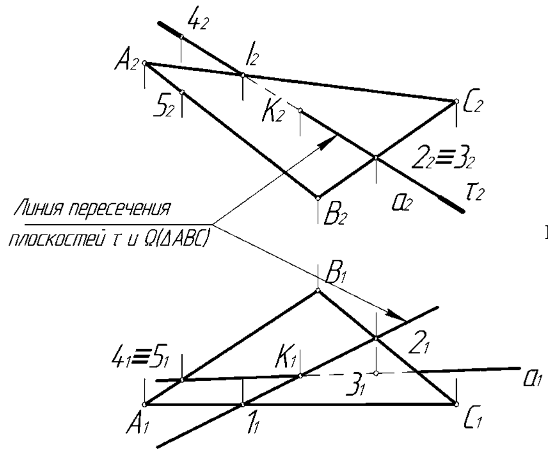


Рис. 6.30

Видимость участков прямой определяем по конкурирующим точкам. По горизонтальной проекции определяем, что точка 3, принадлежащая прямой *a*, будет ближе, чем точка 2, принадлежащая треугольнику *ABC*. Значит, на фронтальной проекции точка 3 будет видима или участок прямой $2K$ будет видимым. По фронтальной проекции определяем, что точка 4 будет выше точки 5, т. е. на горизонтальной проекции видимой будет точка 4, а значит, и участок прямой $4K$ будет видимым.

В качестве посредника можно выбрать линию [12], принадлежащую плоскости (конкурирующую с одной из проекций прямой).

6.7. ГЛАВНЫЕ ЛИНИИ ПЛОСКОСТИ

При решении многих задач на плоскости возникает необходимость определения линий, расположенных особым образом по отношению к плоскостям проекций, — это линии уровня и линии наибольшего ската (наклона к плоскостям проекций), называемые *главными линиями плоскости*. Линии удобнее проводить, используя точки, принадлежащие плоскости, проекции которых уже известны. Отметим, что для плоскостей общего положения нельзя провести проецирующую прямую, так как последнюю можно построить только для плоскостей частного положения.

6.7.1. ЛИНИИ УРОВНЯ

На рисунке 6.31 показана горизонтальная прямая, принадлежащая плоскости $\Omega(\Delta ABC)$.

Построение начинают с той проекции прямой уровня, положение которой относительно координатных осей известно. Для плоскости, показанной на рисунке 6.31, известны проекции трех точек. Поэтому прямую, принадлежащую плоскости, удобно провести через одну из точек таким образом, чтобы она пересекла любой отрезок, принадлежащий плоскости. При определении положения горизонтали удобно использовать точку *A*, так как положение горизонтальной и профильной проекций относительно системы координат известно из свойств горизонтали. На рисунке 6.31 сначала проведена фронтальная или профильная проекция горизонтали параллельно Π_1. Далее определяем положение проекций точки 1 (на фронтальной проекции — пересечение прямых h_2 и C_2B_2). Затем находим положение точки на прямой *CB*, что позволяет определить положение горизонтали в пространстве, соединив точки 1 и *A* прямой линией.

На рисунке 6.32 показано построение горизонтали на комплексном чертеже. Построение начинаем, проведя горизонтальную линию через фронтальную проекцию точки *A*. Положение точки 1 определяем на пересечении h_2 и фронтальной проекции стороны *BC* — B_2C_2. Далее, опускаясь вниз по стрелке, находим горизонтальную проекцию точки 1 — 1_1. Проводим прямую через проекции точек A_1 и 1_1, показываем горизонтальную проекцию горизонтальной прямой уровня.

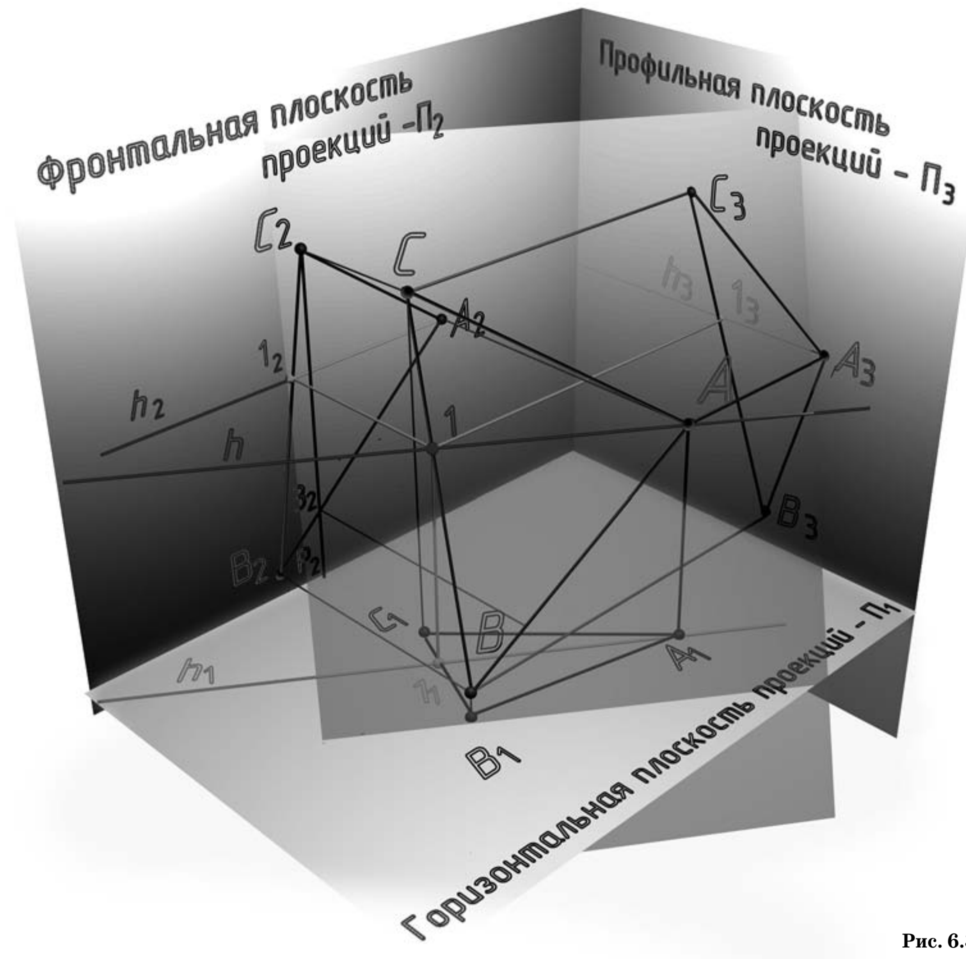


Рис. 6.31

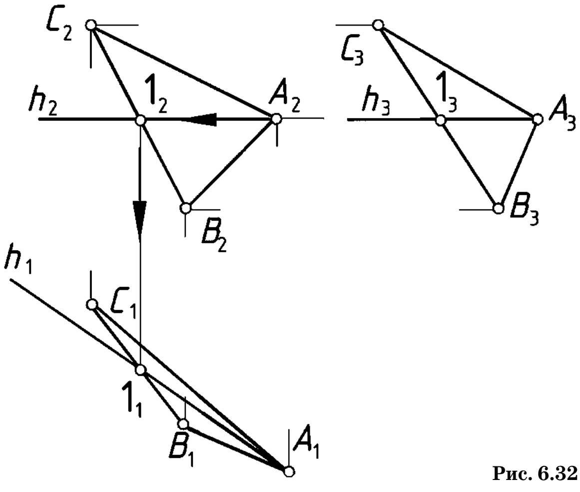


Рис. 6.32

На рисунке 6.33 дано наглядное изображение фронтальной прямой уровня плоскости общего положения $\Omega(\Delta ABC)$. Так как известно положение прямой относительно фронтальной плоскости проекций (для всех точек этой прямой ординаты одинаковы, или все точки этой прямой находятся на одинаковом расстоянии от фронтальной плоскости проекций), то понятно, что построение необходимо начинать с горизонтальной или профильной проекций прямой. Поскольку положение точек A, B и C известно, точки для построения фронтали рационально выбирать таким образом, чтобы они принадлежали уже изображенным геометрическим объектам. В данном случае это либо точка, либо сторона треугольника. Для рационального построения проводим ее через точку B.

Построение фронтали плоскости на комплексном чертеже (рис. 6.34) начинаем с ее горизонтальной проекции: проводим горизонтальную прямую через горизонтальную проекцию точки B. От горизонтальной проекции точки, принадлежащей фронтали и плоскости (1_1), по линии связи на соответствующей стороне треугольника находим фронтальную проекцию точки 1 — 1_2. Соединяем последнюю с точкой B_2, получаем фронтальную проекцию фронтальной прямой уровня, принадлежащую плоскости $\Omega(\Delta ABC)$ (рис. 6.34).

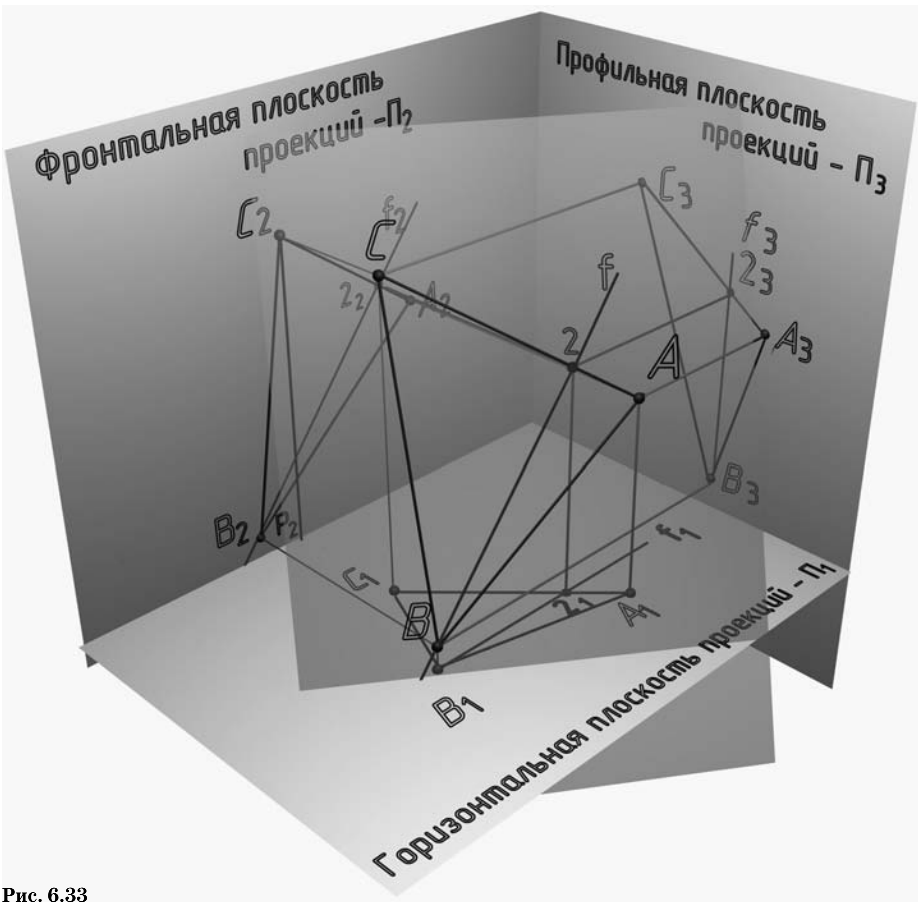


Рис. 6.33

Произведя подобные действия, находим положение профильной прямой уровня, принадлежащей плоскости $\Omega(\Delta ABC)$ (рис. 6.35), наглядное изображение которой представлено на рисунке 6.36.

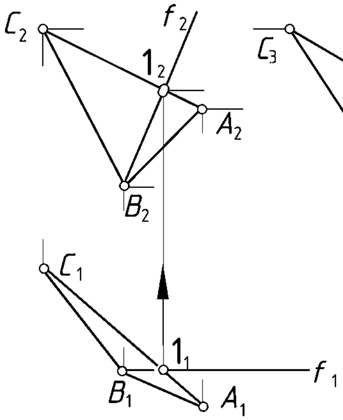


Рис. 6.34

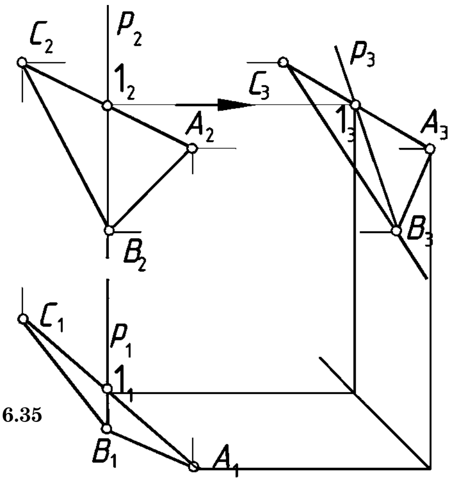


Рис. 6.35

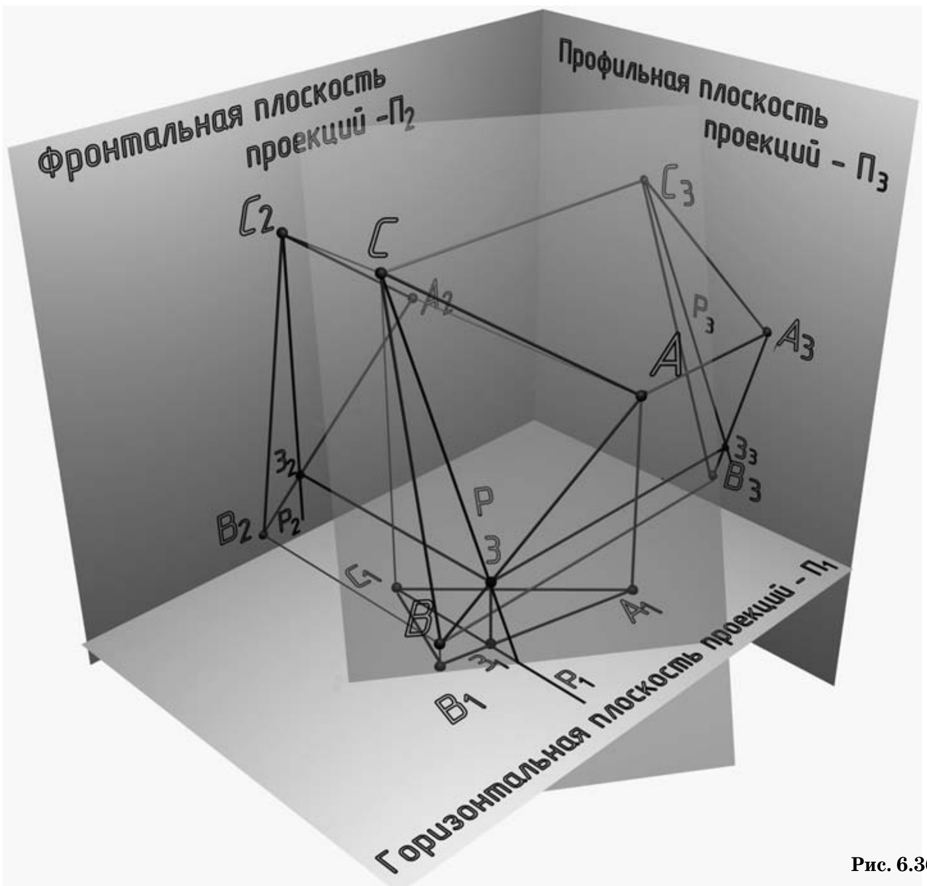


Рис. 6.36

В заключение отметим, что каждая из главных линий плоскости параллельна аналогичной линии в пределах плоскости. Поэтому при необходимости вычерчивания нескольких линий уровня, параллельных одной плоскости проекций, достаточно построить одну линию, а все остальные будут параллельны ей.

6.7.2. ЛИНИЯ НАИБОЛЬШЕГО НАКЛОНА К ПЛОСКОСТИ ПРОЕКЦИЙ

Линия наибольшего наклона к плоскости проекций — линия, принадлежащая плоскости и образующая наибольший угол с плоскостью проекций. Наибольший угол по отношению к плоскости проекций будет в том случае, если мы проведем перпендикуляр к линии уровня плоскости. Таким образом, для того чтобы показать линию наибольшего ската относительно горизонтальной плоскости проекций, нам необходимо провести перпендикуляр к горизонтали. Для фронтальной плоскости проекций линией наибольшего наклона будет перпендикуляр к фронтали. И наконец, для профильной плоскости проекций опустим перпендикуляр к профильной прямой уровня.

На рисунке 6.37 показана линия наибольшего ската l по отношению к горизонтальной плоскости проекций. В плоскости общего положения по-

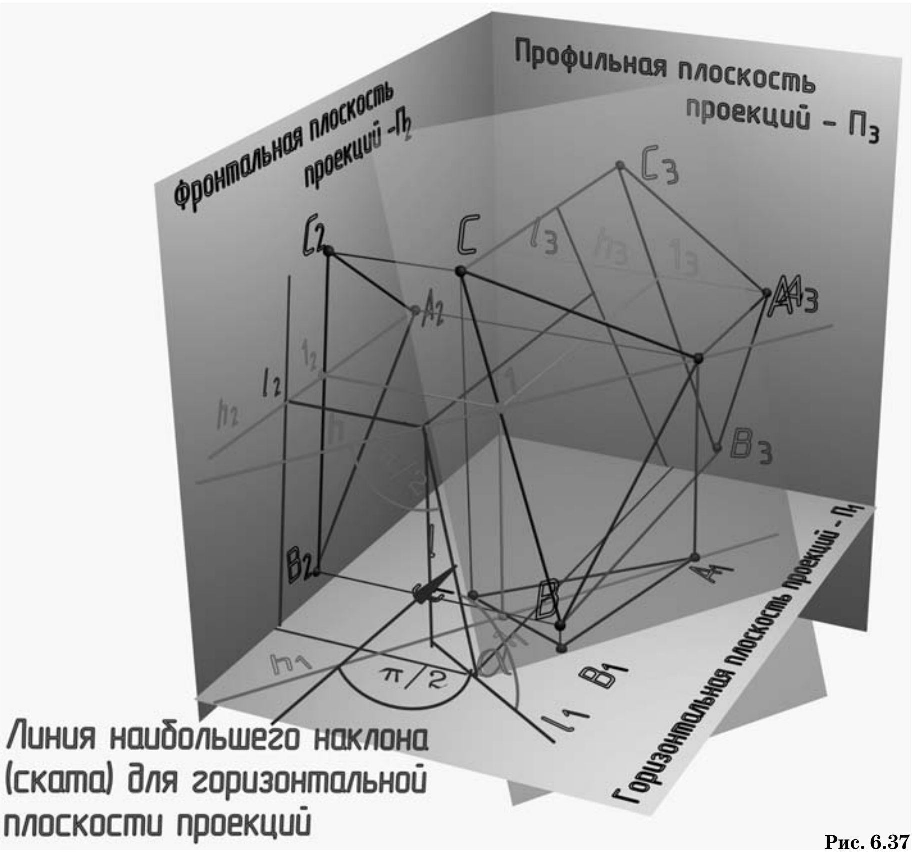


Рис. 6.37

казана горизонталь и проведена прямая, перпендикулярная ей, которая и будет линией наибольшего ската. Угол наклона этой прямой к плоскости проекций будет углом наклона плоскости $\Omega(\Delta ABC)$ к горизонтальной плоскости проекций.

Построение линии наибольшего ската для треугольника ABC по отношению к горизонтальной плоскости проекций на комплексном чертеже приведено на рисунке 6.38. Из точки C опустим перпендикуляр к горизонтали. Угол 90° будет проецироваться без искажения на горизонтальной проекции. Поэтому определяем проекцию точки пересечения перпендикуляра и треугольника — D_1. Затем по линиям связи достраиваем остальные проекции точки D. Угол наклона треугольника ABC можно определить при помощи прямоугольного треугольника для отрезка CD (см. п. 5.4).

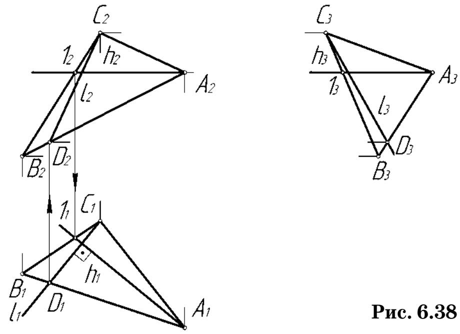


Рис. 6.38

Угол линии наибольшего наклона к фронтальной плоскости будет наибольшим углом между фронтальной плоскостью проекций и линией, принадлежащей плоскости общего положения (в данном случае плоскость $\Omega(\Delta ABC)$). Таким образом, это будет угол наклона плоскости $\Omega(\Delta ABC)$ к фронтальной плоскости проекций — β (рис. 6.39).

Построение линии наибольшего наклона l по отношению к фронтальной плоскости проекций на комплексном чертеже показано на рисунке 6.40. Для фронтальной прямой уровня перпендикуляр будет проецироваться без искажения на фронтальной плоскости проекций. Через точку B проводим горизонтальную прямую, которая является проекцией прямой частного положения (в данном случае фронтали). Сразу можно провести и профильную проекцию этой линии через проекцию точки B. По линиям связи фронтальной и горизонтальной или профильной проекции точки 2 на стороне треугольника AC определяем ее фронтальную проекцию и показываем необходимую проекцию фронтали. На фронтальной плоскости проекций построение аналогично горизонтальной линии ската.

На рисунке 6.41 показана линия наибольшего наклона для профильной плоскости проекций l. Там же показан угол наклона плоскости $\Omega(\Delta ABC)$ к фронтальной плоскости проекций.

Последовательность построения линии наибольшего наклона на комплексном чертеже (рис. 6.42) аналогична рассмотренным выше линиям.

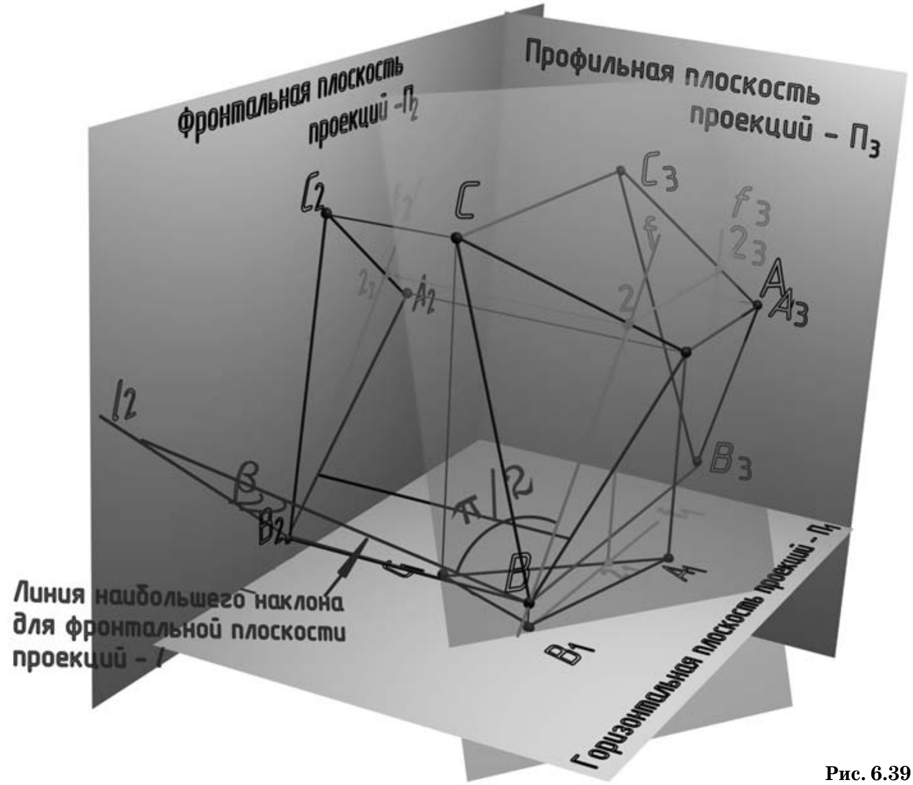


Рис. 6.39

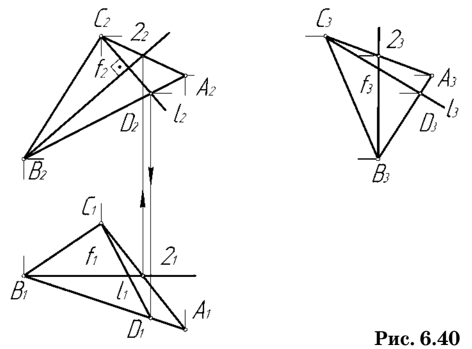


Рис. 6.40

Комплексный чертеж линии наибольшего наклона к профильной плоскости проекций показан на рисунке 6.42.

Пример 24

Задание: по комплексному чертежу определить угол наклона к горизонту крыши здания (рис. 6.43).

Решение: угол наклона крыши здания к горизонту — угол наклона линии наибольшего ската по отношению к горизонтальной плоскости. Таким образом, задача сводится к построению линии наибольшего ската и определению угла между этой линией и горизонтальной плоскостью проекций (рис. 6.43).

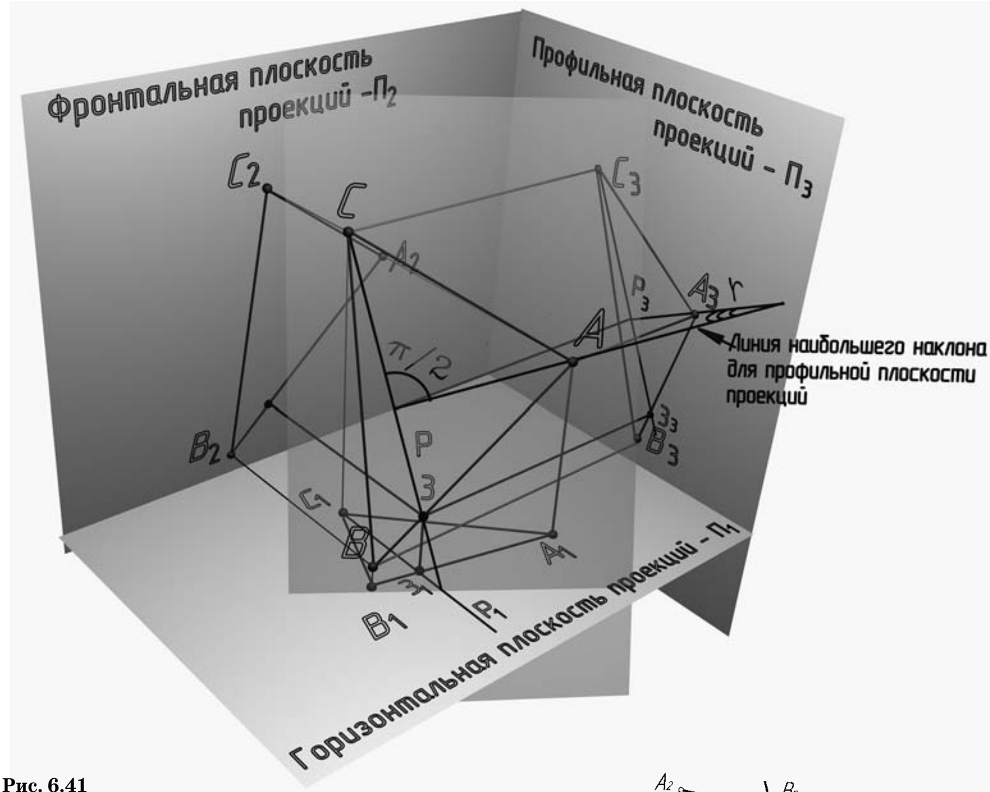


Рис. 6.41

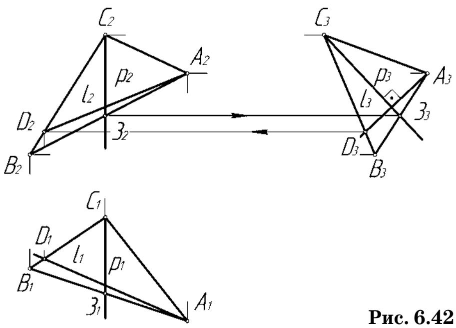


Рис. 6.42

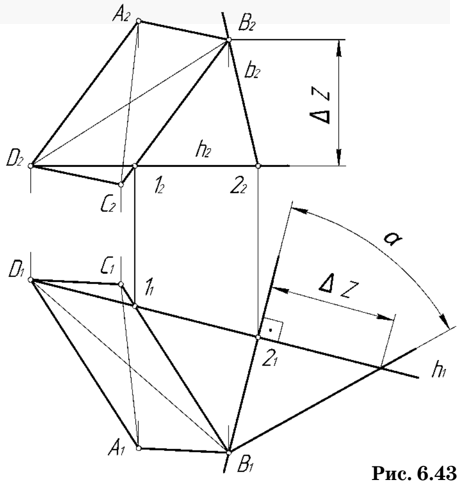


Рис. 6.43

Прежде чем приступать к решению задачи, проверим, является ли четырехугольник, представленный на рисунке 6.43, плоским. Для этого проведем диагонали многоугольника. Так как точка пересечения лежит на одной линии связи, то точка принадлежит фигуре. Отсюда делаем вывод, что четырехугольник на самом деле плоская фигура. Отметим, что таким образом на технических чертежах обозначают плоские элементы детали.

Итак, линия наибольшего ската для нашей задачи будет перпендикулярна к горизонтальной линии уровня, у которой фронтальная проекция горизонтальна. Поэтому через фронтальную проекцию точки D — D_2 проводим горизонтальную линию, которая пересечет проекцию стороны BC — B_2C_2 в точке 1_2. Далее, по линии связи, определяем горизонтальную проекцию точки 1 и показываем горизонтальную проекцию горизонтальной прямой линии, соединив проекции точек D и 1, т. е. D_1 и 1_1.

Теперь строим горизонтальную проекцию линии наибольшего ската. Проводим ее горизонтальную проекцию через проекцию точки B перпендикулярно горизонтальной проекции горизонтали. Далее показываем горизонтальную проекцию точки 2 в точке пересечения горизонтальных проекций горизонтальной линии уровня и линии ската. Наконец, по линии связи определяем фронтальную проекцию точки 2 и проводим фронтальную проекцию линии наибольшего ската.

Угол наклона определим при помощи правила прямоугольного треугольника.

6.8. ПРИЗНАК ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТИ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ

На рисунке 6.44 показана прямая a, принадлежащая плоскости Ω. Прямая d, перпендикулярная прямой a, не будет перпендикулярна к плоскости Ω. Таким образом, для того, чтобы провести перпендикуляр к плоскости, одной линии недостаточно. Более того, прямая, перпендикулярная к параллельным прямым, расположенным в плоскости, не будет являться признаком перпендикулярности прямой к плоскости. Рассмотрим прямую b, которая будет перпендикулярна к двум пересекающимся прямым — a и e. Прямая b будет перпендикулярна к плоскости, так как она перпендикулярна второй прямой e, и совершенно очевидно, что любая прямая, принадлежащая плоскости Ω, будет перпендикулярна к прямой b. В частности, прямая g, скрещивающаяся с прямой b, будет перпендикулярна ей. Отсюда можно сформулировать признак перпендикулярности прямой к плоскости.

Если прямая линия перпендикулярна двум не параллельным прямым, принадлежащим плоскости, то она перпендикулярна и самой плоскости.

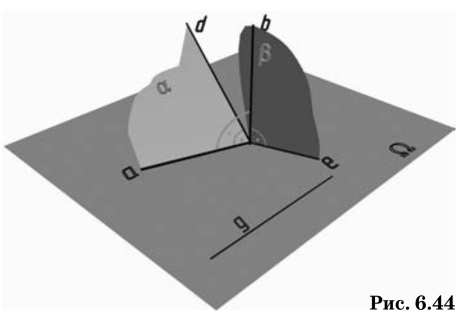


Рис. 6.44

Пример 25

Задание: из точки D восстановить перпендикуляр к плоскости $\Delta(\Delta ABC)$ (рис. 6.45*а*).

Решение: определяем принадлежность точки D к плоскости $\Delta(\Delta ABC)$ (рис. 6.45*б*). Для этого проведем прямую a и убедимся, что точка D принадлежит плоскости, а значит, эта точка является точкой основания перпендикуляра b к плоскости.

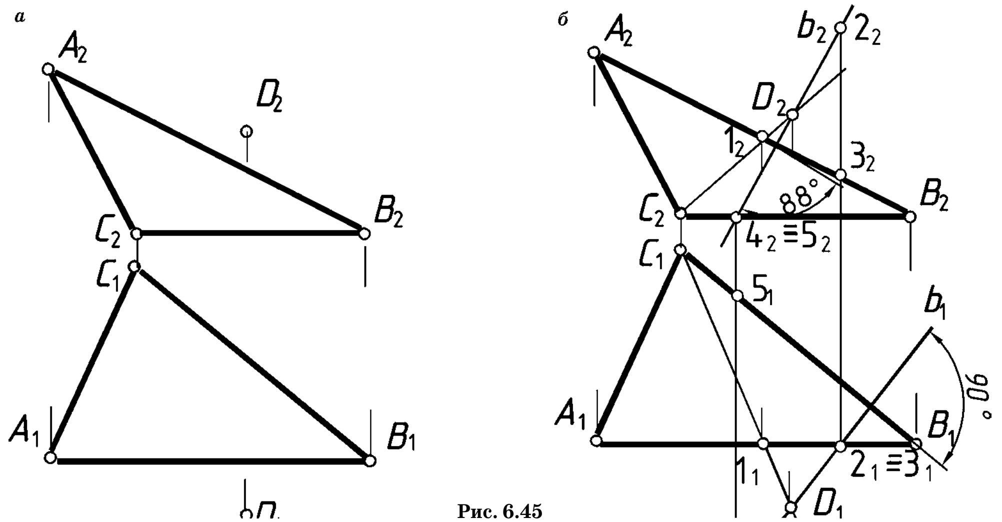


Рис. 6.45

Для того чтобы прямая была перпендикулярна к плоскости, необходимо, чтобы она была перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, принадлежащим плоскости. Так как AB — фронталь, а CB — горизонталь, то восстановим линии, перпендикулярные к соответствующим проекциям, проходящим через точку D, которые будут являться проекциями перпендикуляра к плоскости. Таким образом, прямая b будет перпендикулярна к двум пересекающимся прямым h и f, что в конечном счете и служит признаком перпендикулярности прямой к плоскости.

Определим видимость перпендикуляра по точкам 4 и 5 для горизонтальной проекции. Для указанных точек видимой будет точка 4, которая ближе к наблюдателю (см. горизонтальную проекцию на рисунке 6.45*б*). Точка 4 принадлежит прямой, а значит, на фронтальной проекции этот участок ее будет видимым. По горизонтально конкурирующим точкам 2 и 3 определяем видимость участков прямой на горизонтальной плоскости проекций. По фронтальной проекции можно увидеть, что точка 2, принадлежащая прямой, расположена выше точки 3, принадлежащей плоскости. Поэтому на горизонтальной проекции видимой будет точка 2, а значит, видимой на этом участке будет проекция прямой.

6.9. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПЛОСКОСТЕЙ

Плоскости, как и прямые линии, могут совпадать, пересекаться и быть параллельны друг другу, но в отличие от прямых линий не могут скрещиваться, так как плоскость в пространстве бесконечна.

6.9.1. ПРИЗНАК СОВПАДЕНИЯ ПЛОСКОСТЕЙ

Две плоскости совпадают, если три точки, не лежащие на одной прямой одной плоскости, принадлежат другой плоскости. На рисунке 6.46 плоскости $\Omega(\Delta ABC)$ и $\Sigma(a\|b)$ совпадают, так как прямая d принадлежит плоскости $\Omega(\Delta ABC)$, а точки 1 и 2 — плоскости $\Sigma(a\|b)$ и прямой d.

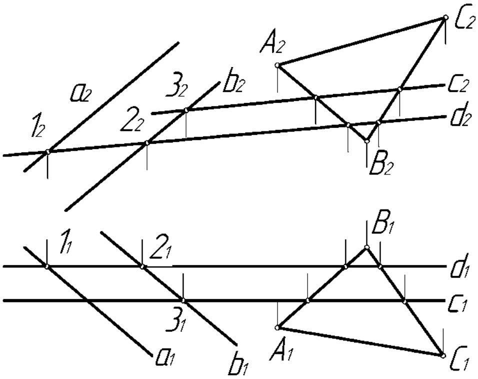


Рис. 6.46

Аналогично точка 3 принадлежит плоскости $\Sigma(a\|b)$ и одновременно прямой c, которая принадлежит плоскости $\Omega(\Delta ABC)$. Таким образом, точки 1, 2 и 3 принадлежат обеим плоскостям $\Omega(\Delta ABC)$ и $\Sigma(a\|b)$.

Рассмотренный выше признак является не единственным, он вытекает из способа задания плоскостей, количество которых равно пяти, поэтому можно сформулировать пять признаков совпадения плоскостей. Однако практически все они сводятся к рассмотренному выше.

6.9.2. ПРИЗНАК ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ ПЛОСКОСТЕЙ

Плоскости параллельны друг другу, если две пересекающиеся прямые одной плоскости параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости.

На рисунке 6.47 показаны две параллельные плоскости $\Omega(\Delta ABC)$ и $\Sigma(a\cap b)$; a и b параллельны CB и AB.

Таким образом, **две плоскости параллельны, если параллельны соответствующие проекции двух пересекающихся проекций прямых, которые принадлежат этим плоскостям:**

$$b_1\|A_1B_1\wedge a_1\|B_1C_1;\;\; b_2\|A_2B_2\wedge a_2\|B_2C_2;$$
$$a\cap b\wedge AB\cap BC\Rightarrow\Sigma\|\Omega.$$

Однако всегда проверять плоскости на признак совпадения не имеет смысла.

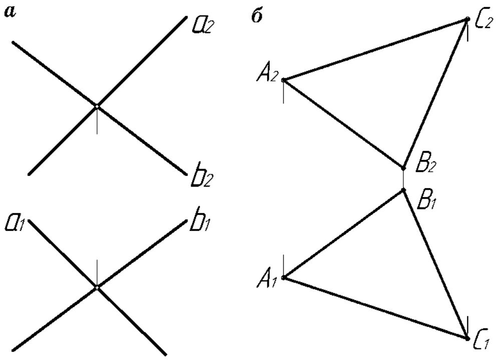


Рис. 6.47

6.9.3. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПЛОСКОСТЕЙ

Как было отмечено выше, пересечение двух плоскостей происходит по прямой линии. Это можно увидеть при пересечении двух проецирующих плоскостей. На рисунке 6.48 показано пересечение двух проецирующих плоскостей. На фронтальной проекции видно, что линия пересечения проецируется в точку. Такая проекция возможна только лишь у фронтально проецирующей прямой линии.

Определение линии пересечения проецирующей плоскости и плоскости общего положения было рассмотрено при решении задачи пересечения прямой линии и плоскости способом проецирующих плоскостей-посредников (рис. 6.26, 6.28 линия 12).

Анализируя рассмотренный вариант пересечения, можно сказать, что линия пересечения плоскостей общего положения будет линией общего положения (рис. 6.49) или прямой уровня.

Определение линии пересечения плоскостей общего положения можно выполнить способом замены плоскостей проекций и способом вспомогательных поверхностей.

На рисунке 6.49 показано определение линии пересечения двух плоскостей $\Omega(\Delta ABC)$ и $\Theta(\Delta EFD)$

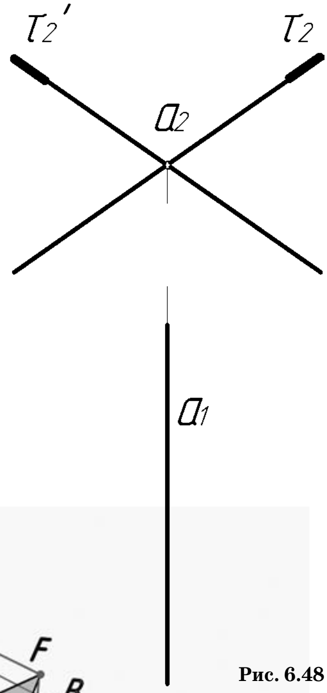


Рис. 6.48

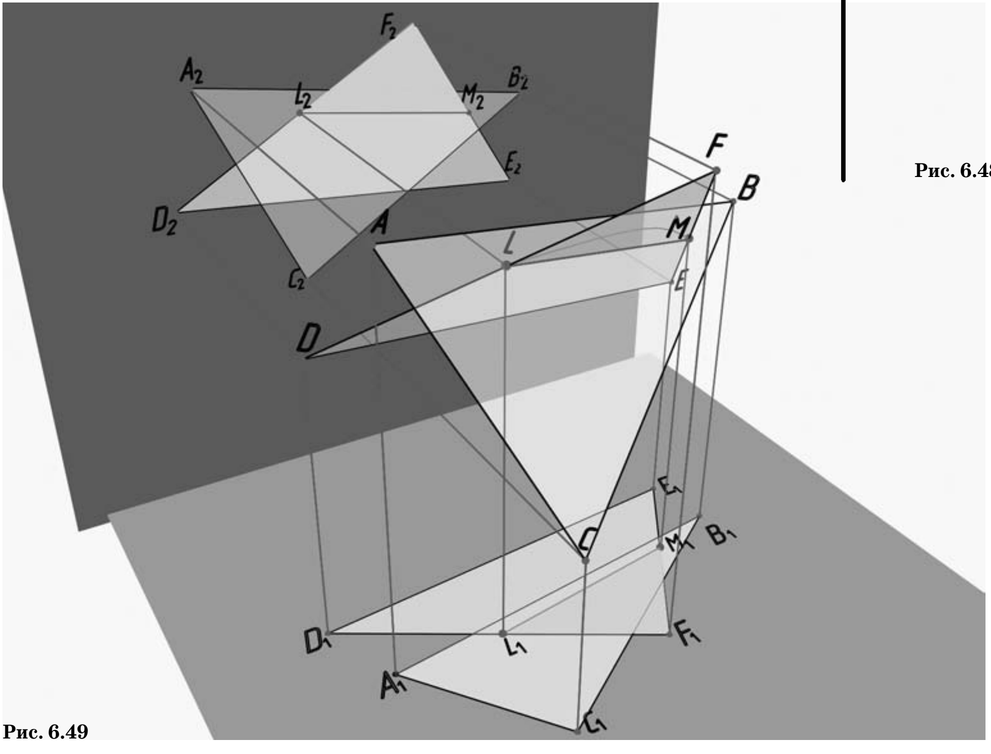


Рис. 6.49

способом геометрических объектов-посредников — проецирующих плоскостей или прямых линий-посредников.

Так как линией пересечения является прямая линия, то для решения задачи необходимо найти две точки, принадлежащие линии обеих плоскостей.

Задача сводится к определению точек пересечения линии, принадлежащей одной плоскости, с другой плоскостью. Поэтому для решения подобного рода задач выбирается способ задания плоскостей в виде треугольников. Если мы имеем другой способ задания плоскости, то тогда встает необходимость построения прямой, принадлежащей плоскости. Причем следует учитывать то, что если в ходе решения задачи для прямой общая точка находится в бесконечности, то это не значит, что плоскости параллельны, так как, исходя из признака параллельности, необходимо доказать, что вторая прямая, пересекающая первую, будет параллельна. В качестве поверхностей-посредников используем фронтально проецирующие плоскости. На комплексном чертеже плоскости-посредники графически обозначены в виде прямых линий с утолщенными концами. Определяем точки пересечения какой-либо стороны одного треугольника с плоскостью другого: точки K — пересечением стороны AC с плоскостью треугольника $\Theta(\Delta EFD)$ и точки L — пересечением стороны CB с плоскостью треугольника $\Theta(\Delta EFD)$. Точки K и L находим аналогично рассмотренному выше примеру при определении точки пересечения прямой и плоскости. Соединяем прямой линией найденные точки и получаем линию пересечения плоскостей.

Видимость участков плоскостей определяем при помощи конкурирующих точек, принадлежащих различным плоскостям.

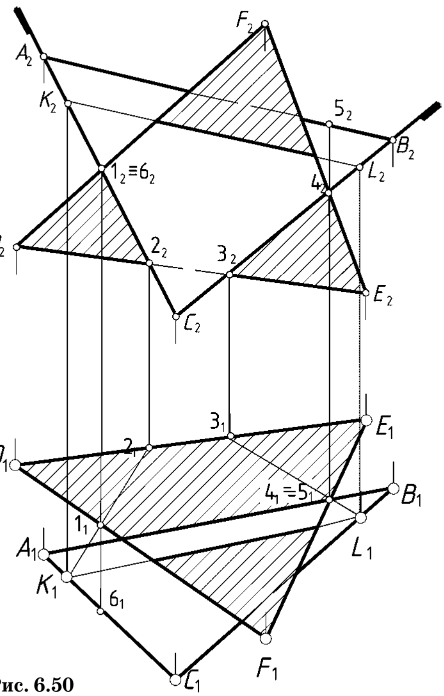


Рис. 6.50

Определение видимости по точкам 6(1) и 5(4). По горизонтальной проекции определяем, что точка 6 ближе, чем точка 1. В свою очередь, точка 6 принадлежит стороне AC плоскости $\Omega(\Delta ABC)$. Значит, на фронтальной проекции часть $K_2C_2L_2$ будет видимой. По конкурирующим точкам 5(4) определяем, что точка 5 выше, чем точка 4. Последнее означает, что на горизонтальной проекции будет видна точка 5, принадлежащая стороне AB. На рисунке 6.50 задача решена на комплексном чертеже.

При решении задачи мы выбрали вспомогательные проецирующие плоскости таким образом, чтобы стороны треугольников принадлежали этим плоскостям. Следует отметить, что вспомогательные плоскости можно выбирать произвольно, исходя из рациональности решения задачи.

6.9.4. ПРИЗНАК ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТИ ДВУХ ПЛОСКОСТЕЙ

Для того чтобы сформулировать признак перпендикулярности двух плоскостей, рассмотрим рисунок 6.51. Общим признаком для всех плоскостей, перпендикулярных к плоскости Ω, будут линии, параллельные между собой и перпендикулярные к ней. Линией пересечения двух плоскостей является прямая линия. Для плоскости A — линии a и b. Причем прямая b перпендикулярна к плоскости Ω. Таким образом, плоскость А можно определить при помощи двух пересекающихся прямых — $A(a \cap \text{b})$. Таким образом, признак перпендикулярности двух плоскостей сводится к признаку перпендикулярности прямой к плоскости (п. 6.8).

Две плоскости перпендикулярны, если прямая линия одной плоскости перпендикулярна другой плоскости.

На рис. 6.52 показаны две взаимно перпендикулярные плоскости $\Sigma(h \cap f)$ и $\Delta(A, b)$, так как прямая b плоскости Δ перпендикулярна прямым уровня h и f второй плоскости Σ. Отметим, что общие точки плоскостей Σ и Δ на чертеже не показаны.

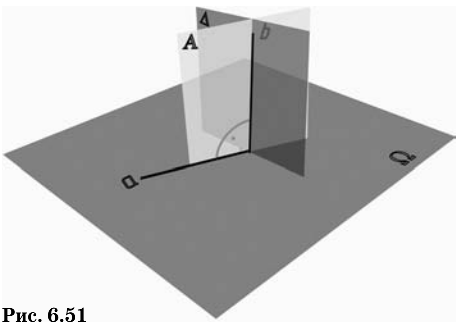


Рис. 6.51

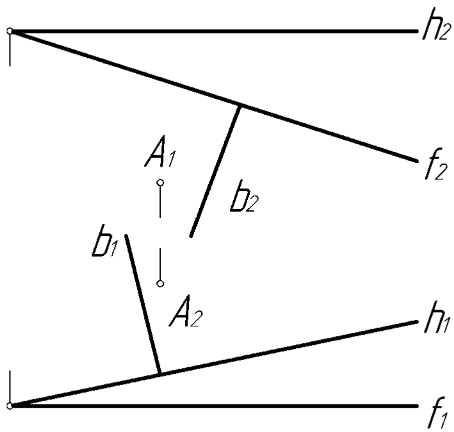


Рис. 6.52

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Дать определение плоскости:
   а) общего положения;
   б) уровня;
   в) проецирующей.
2. Какими геометрическими элементами можно задать плоскость общего положения на комплексном чертеже?
3. Какими свойствами обладают плоскости частного положения и каковы их свойства? Перечислить способы их задания.
4. Дать определение взаимного положения точки и прямой относительно плоскости. Показать на примерах.
5. Каковы признаки параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости? Показать на примерах.

6. Каковы признаки параллельности и перпендикулярности двух плоскостей? Показать на примерах.
7. Записать алгоритм определения линии пересечения двух плоскостей.
8. Перечислить главные линии плоскости.
9. Как располагаются относительно плоскостей проекций прямые уровня в проецирующих плоскостях?
10. Как определить угол наклона плоскости к плоскостям проекций?
11. Какое практическое значение может иметь решение метрических задач с использованием линии наибольшего ската плоскости?
12. Какой способ применяют для определения линии пересечения поверхностей или точек пересечения поверхностей с прямой линией?
13. Каким способом определяют видимость частей пересекающихся элементов?

7 ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КОМПЛЕКСНОГО ЧЕРТЕЖА

При построении ортогональных чертежей предметов учитывается прежде всего требование построить более выгодное наглядное изображение предмета в целом или наглядные изображения тех элементов предмета, которые являются объектом исследования. При исследовании предмета или его отдельных элементов чертеж должен удовлетворять требованиям, связанным с решением позиционных и метрических задач. Необходимым условием упрощения решения таких задач является построение новых дополнительных проекций исходя из двух заданных. Дополнительные проекции позволяют получить либо вырожденные проекции отдельных элементов, либо эти элементы в натуральную величину. Построение дополнительных проекций называют *преобразованием* чертежа.

7.1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Любое изучение предмета с точки зрения его геометрических особенностей происходит путем его осмотра следующими способами:

а) с изменением направления взгляда (при неизменном положении предмета);

б) с изменением положения предмета (при неизменном направлении взгляда);

в) комбинированным способом.

В соответствии с первым способом преобразование комплексного чертежа выполняется путем изменения направления проецирования на дополнительные плоскости проекций при неизменном положении тела. Это **способ замены плоскостей проекций**. Второй способ преобразования комплексного чертежа требует при неизменном положении плоскостей проекций изменения положения тела. Это **способ вращения вокруг проецирующей прямой или прямой уровня и плоскопараллельного перемещения**.

Необходимость преобразования комплексного чертежа способом замены плоскостей проекций продиктована тем, что при выполнении чертежей основные виды не всегда достаточно полно характеризуют геометрические особенности предмета.

Преобразование комплексного чертежа способом вращения проекций вокруг оси применяют при построении *ломаных разрезов* — при нескольких секущих плоскостях, непараллельных друг другу. Возникает необходимость поворота секущей плоскости вокруг проецирующей прямой и определения проекции, полученной в результате этого поворота.

Задачи, решаемые способами начертательной геометрии, можно классифицировать как позиционные и метрические. Первые касаются вопросов взаимного положения геометрических объектов (принадлежность точки прямой или плоскости, определение точки пересечения прямой и плоскости, определение линии пересечения геометрических объектов). Вторые задачи касаются вопросов, связанных с определением численных значений, характеризующих геометрические объекты (длина, углы и т. п.).

Решение указанных выше задач значительно упрощается, когда геометрические фигуры занимают частное положение относительно плоскостей проекций. Это положения проецируемых фигур, при которых получаются проекции проецируемых фигур, удобные для решения задач:

а) положение, *перпендикулярное* плоскости проекции, — при решении позиционных задач;

б) положение, *параллельное* плоскости проекции, — при решении метрических задач.

Преобразование комплексного чертежа помогает получить удобные проекции для решения поставленной задачи.

7.2. СПОСОБ ЗАМЕНЫ ПЛОСКОСТЕЙ ПРОЕКЦИЙ

Для определения положения точки в пространстве достаточно знать три координаты этой точки. На любой плоскости проекций определена только пара координат. Для того чтобы координат было три, необходимо ввести еще одну плоскость проекций, на которой будет также пара координат точки. В сумме для двух плоскостей имеем четыре координаты, из которых одна будет зависимой от других координат. Таким образом, если количество плоскостей будет больше одной, то количество независимых координат будет только три. Минимальное количество плоскостей проекций, необходимое для построения точки в пространстве, будет две. Построение третьей проекции ранее рассматривалось в п. 3.3.

Вводя дополнительную плоскость, мы осуществляем преобразование системы координат, которое можно выразить следующей формулой:

$$X_i = a_{ij} X_j ,^*$$

где X_i — координаты; a_{ij} — направляющие косинусы между старой и новой системами координат.

Для взаимно перпендикулярных осей координат $a_{ij} = 0$ или 1. Отсюда вытекает простота преобразования комплексного чертежа за счет требования перпендикулярности дополнительной плоскости.

Замену плоскостей проекций необходимо проводить перпендикулярно любой плоскости проекций. Это требование необходимо соблюдать для того, чтобы при построении дополнительной проекции расстояние от плоскости, к которой восстанавливается перпендикулярная плоскость, до проекции точки было бы таким же, как и на другой плоскости проекций. Если дополнительная плоскость проекций будет перпендикулярна фронтальной плоскости проекций, то координата Y будет одинаковой для профильной, горизонтальной и дополнительной проекций. Дополнительная плоскость, перпендикулярная горизонтальной плоскости проекции, будет иметь ту же координату Z, что и на фронтальной и профильной плоскостях проекций. Одинаковая координата X для фронтальной и горизонтальной плоскостей будет у любой дополнительной плоскости, показанной перпендикулярно профильной плоскости проекций.

Пусть в системе плоскостей Π_1/Π_2 определены проекции точки A (A_1 и A_2), (рис. 7.1). Линию пересечения (ось x) плоскостей проекцией Π_1 и Π_2 назовем

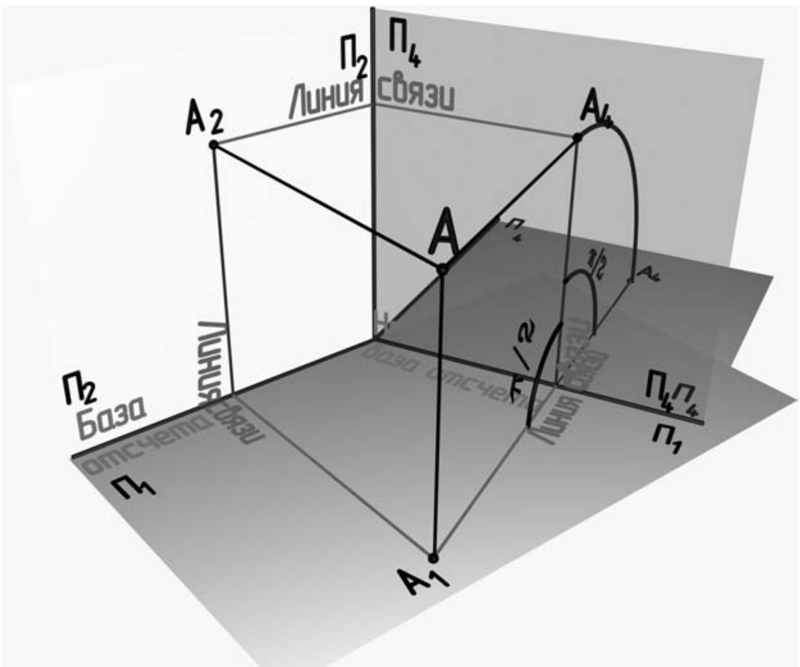


Рис. 7.1

* Использована запись по правилу Эйнштейна — суммирование по повторяющимся индексам.

базой отсчета — Π_1/Π_2. Поместим дополнительную плоскость проекций Π_4 *перпендикулярно* горизонтальной плоскости проекций. Профильная плоскость проекций Π_3 не показана. Линию пересечения плоскостей проекций Π_1/Π_4 назовем новой базой отсчета. Так как дополнительная плоскость проекций перпендикулярна горизонтальной плоскости проекций, то расстояние от проекций точки до баз отсчета Π_1/Π_2 и Π_1/Π_4 одинаково, т. е. для обеих плоскостей общей будет координатная ось z. Поэтому для нахождения проекции точки A на дополнительной плоскости проекций Π_4 необходимо отложить координату Z (измерив Δz на фронтальной плоскости проекций Π_2) вдоль линии связи $A_1 — A_4$.

На рисунке 7.2 приведен комплексный чертеж, соответствующий наглядному изображению на рисунке 7.1. При решении задач способом преобразования комплексного чертежа основная и дополнительная базы выбираются произвольно (см. рис. 7.1), исходя из требований упрощения решения задачи. Тогда необходимым условием правильности решения задачи является перпендикулярность линий связи линиям пересечения плоскостей проекций — баз отсчета.

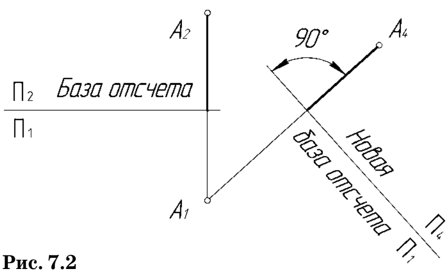


Рис. 7.2

Дополнительная плоскость проекций проводится произвольно с обязательным условием ее перпендикулярности основной или дополнительной плоскости проекций. На рисунке 7.3 показано наглядное изображение двойного преобразования: первого (перпендикулярно горизонтальной плоскости проекций Π_1 проведена плоскость Π_4); второго (перпендикулярно новой плоскости проведена вторая дополнительная плоскость проекций Π_5). Для первого преобразования общей координатой для плоскостей Π_2 и Π_4 будет координата вдоль оси z (перпендикулярной плоскости Π_1, а значит, принадлежащей плоскости Π_4). Для второго преобразования общей будет координата вдоль оси, перпендикулярной к плоскости Π_4, а значит, принадлежащей второй дополнительной плоскости проекций Π_5.

На рисунке 7.4 показан комплексный чертеж приведенного на рисунке 7.3 двойного преобразования. Криволинейными стрелками указаны общие координаты для первого и второго преобразований.

Подобного рода преобразования комплексного чертежа можно проводить любое количество раз. Следует помнить, что всякий раз дополнительная плоскость проекций проводится *перпендикулярно* существующей плоскости проекций, что обеспечивает равенство расстояний вдоль линий связи от проекций до баз отсчета.

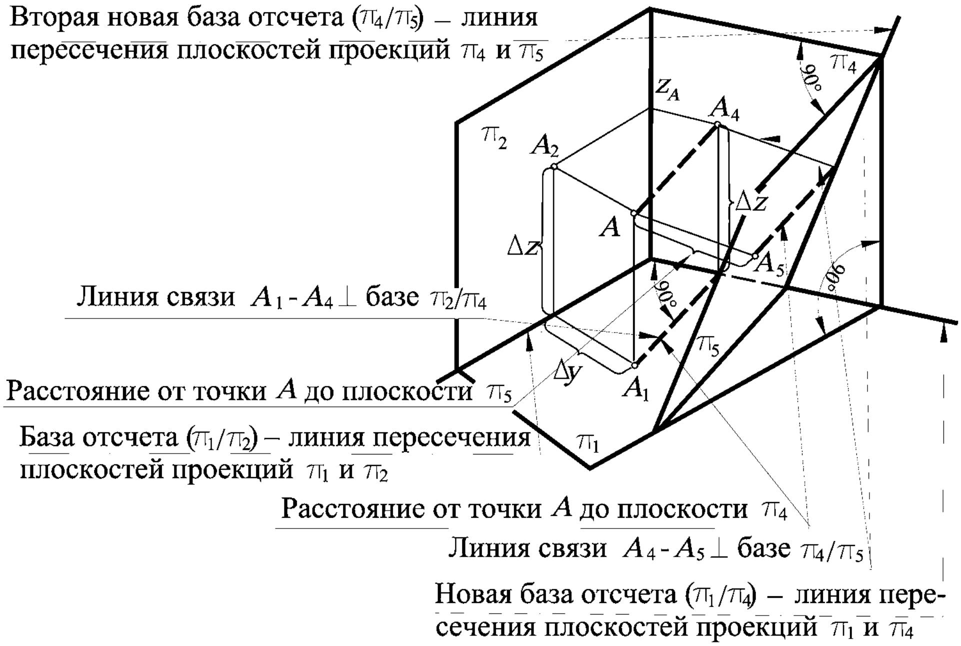


Рис. 7.3

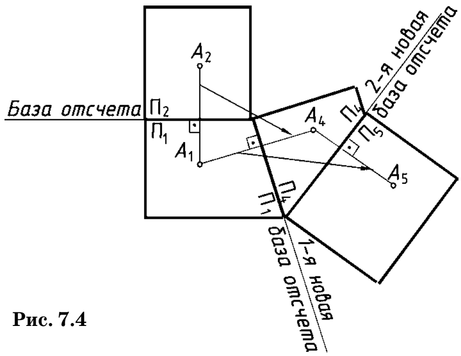


Рис. 7.4

Подобные преобразования будут справедливы, если построения проводить, начиная с горизонтальной плоскости проекций. Построение дополнительной плоскости проекций $П_4$ *перпендикулярно* (рис. 7.4) горизонтальной плоскости проекций $П_1$ обеспечивает равенство расстояний вдоль линий связи от проекций точки до соответствующих баз отсчета, а именно вдоль оси z.

Пример 26

Задание: построить линию пересечения плоскостей $\Omega(\Delta ABC)$ и $\Sigma(\Delta EFD)$.

Решение: для определения линии пересечения плоскостей чертеж необходимо преобразовать таким образом, чтобы одна из заданных плоскостей стала проецирующей. На рисунке 7.5 дополнительная плоскость $П_4$ выбрана так, чтобы она была перпендикулярна плоскости проекций $П_2$ и проекции A_2C_2 (AC — отрезок фронтальной прямой уровня, на $П_4$ проецируется

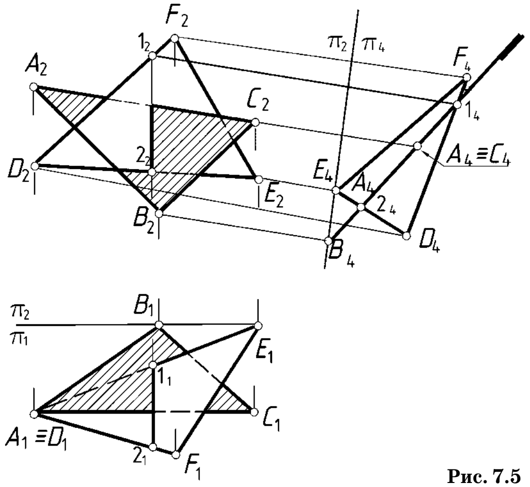


Рис. 7.5

в виде конкурирующих точек A_4 и C_4). Так как проекция треугольника ABC на плоскость Π_4 выглядит как проекция проецирующей плоскости, то проекция линии пересечения на дополнительную плоскость будет 1_42_4. По построенной проекции находим фронтальную, а затем горизонтальную проекцию линии пересечения. Точка A выше, чем точка D (см. фронтальную проекцию), а значит, на горизонтальной проекции у плоскости $\Omega(\Delta ABC)$ будет видна часть от вершины A до линии пересечения. На фронтальной проекции видна будет часть от линии пересечения до вершины C треугольника, так как точка C ближе, чем точка E (см. рис. 7.5, горизонтальную проекцию).

Отметим, что для определения величины угла между плоскостями необходимо преобразовать чертеж таким образом, чтобы линия пересечения была перпендикулярна дополнительной плоскости проекций. Для этого первая дополнительная плоскость проекций должна занять параллельное положение относительно линии пересечения, а вторая — перпендикулярное.

7.3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КОМПЛЕКСНОГО ЧЕРТЕЖА СПОСОБОМ ВРАЩЕНИЯ ВОКРУГ ПРОЕЦИРУЮЩЕЙ ПРЯМОЙ

Преобразование комплексного чертежа путем вращения основывается на том, что при преобразовании остается неизменной одна из координат точки.

При вращении точки вокруг фронтально проецирующей прямой траектории движения всех точек будут окружностями (рис. 7.6), расположенными в плоскости (Ф), параллельной фронтальной плоскости проекций (координата Y одинакова для всех положений точки). Фронтальной проекцией траектории движения точки также будет окружность, а горизонтальной проекцией — отрезок прямой линии, параллельный плоскости Π_2 или оси x. Таким образом, точка A при вращении вокруг оси i повернется на угол φ и займет новое положение A^1. Фронтальная проекция точки A также переместится по окружности на угол φ и из положения A_2 переместится в положение A_2^1. Горизонтальная проекция точки A переместится по прямой, параллельной оси x, и из положения A_1 переместится в положение A_1^1. Аналогичные преобразования можно осуществить при вращении вокруг горизонтально или профильно проецирующей прямой.

На рисунке 7.7 показан комплексный чертеж преобразования проекций точки A вращением вокруг фронтально проецирующей прямой i.

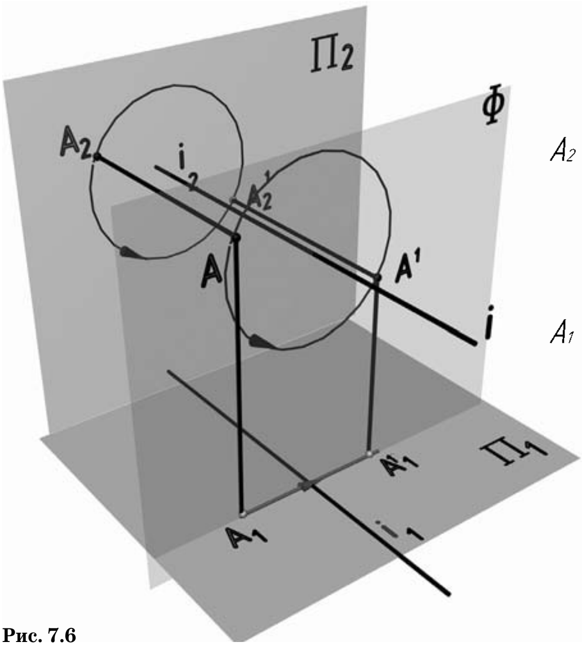


Рис. 7.6

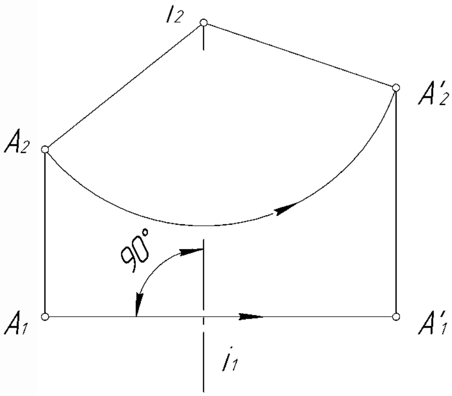


Рис. 7.7

Алгоритм преобразования таков: производим поворот всех проекций точек тела вокруг проецирующей прямой; показываем линии связи для преобразованных проекций точек; на другой плоскости проекций (на которой линии связи параллельны проекции оси вращения) проводим линии, перпендикулярные линиям связи, соединяя новые линии связи с соответствующими проекциями точек этой другой плоскости проекций.

Достоинство данного способа состоит в том, что нет необходимости в увеличении поля чертежа, недостаток — наложение нескольких изображений.

Пример 27

Задание: определить натуральную величину треугольника *ABC* (рис. 7.8*а*).

Решение: так как Δ*ABC* является фронтально проецирующим, то преобразование чертежа удобнее провести путем поворота вокруг фронтально проецирующей прямой *i* треугольника *ABC* (рис. 7.8*б*) до положения, параллельного горизонтальной плоскости проекций. Тогда плоскость тре-

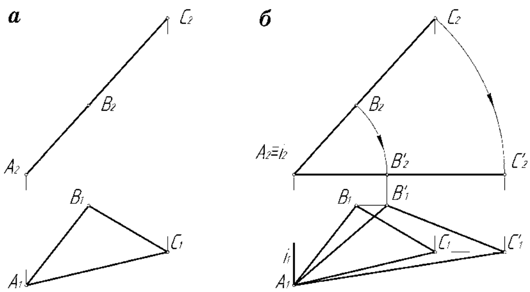


Рис. 7.8

угольника займет положение горизонтальной плоскости уровня. Преобразованная горизонтальная проекция треугольника будет тождественна натуральной величине треугольника *ABC*.

7.4. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КОМПЛЕКСНОГО ЧЕРТЕЖА СПОСОБОМ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕЩЕНИЯ

Рассмотренный выше способ преобразования комплексного чертежа вращением вокруг проецирующей прямой не всегда удобно применять при построении чертежей, так как преобразованные и оригинальные проекции накладываются друг на друга. Применяя способ плоскопараллельного перемещения, можно избежать этого недостатка.

При преобразовании комплексного чертежа плоскопараллельным перемещением происходит одновременное вращение вокруг проецирующей прямой и поступательное движение параллельно плоскости проекций, перпендикулярной оси вращения (рис. 7.9). Данное преобразование также происходит при неизменности одной из координат.

На рисунке 7.9 показана точка A, спроецированная на горизонтальную A_1 и фронтальную A_2 плоскости проекций. Вращение точки A происходит вокруг фронтально проецирующей оси i. В результате поворота вокруг

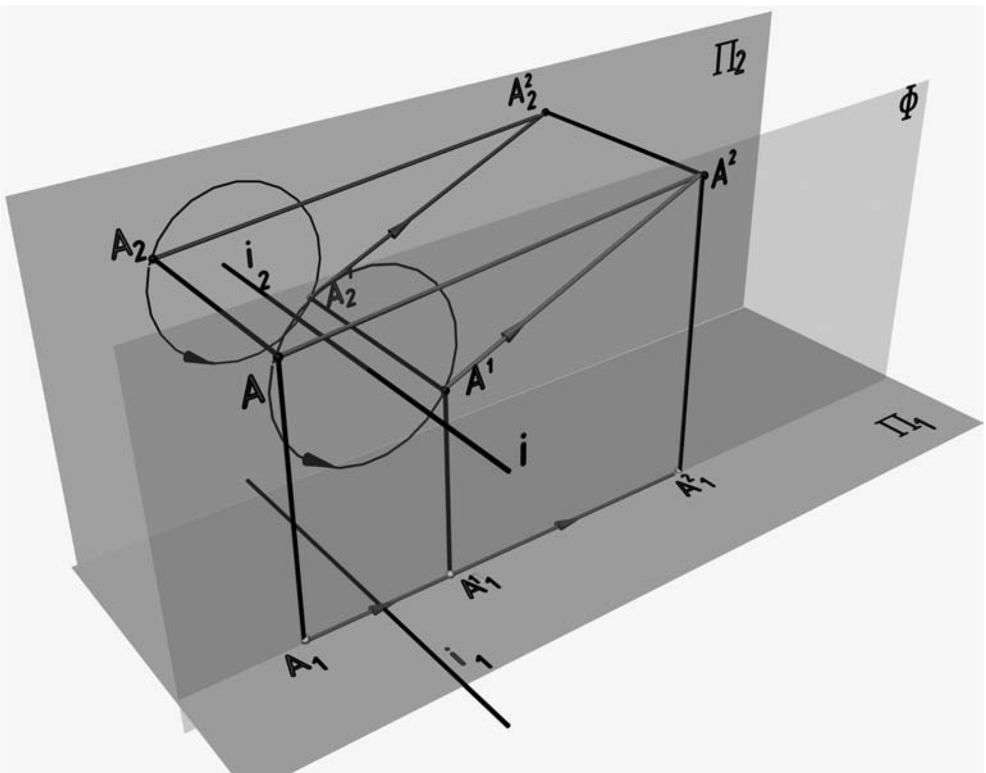
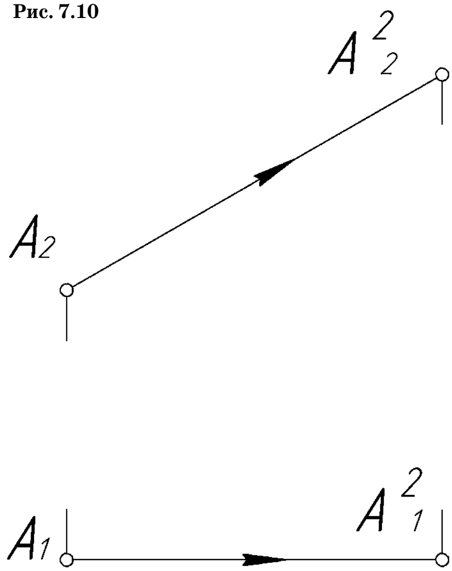


Рис. 7.9

оси происходит перемещение точки по дуге окружности, расположенной в плоскости Ф, перпендикулярной оси вращения, а значит, параллельной плоскости проекций $П_2$. На последней траектория перемещения проекции точки A будет идентична траектории движения точки.

На горизонтальной плоскости проекций проекция точки A будет перемещаться по прямой линии, параллельной фронтальной плоскости проекций. Далее перемещаем точку A в плоскости Ф, что приведет к конгруэнтному перемещению проекции точки во фронтальной плоскости проекций. На горизонтальной плоскости проекций перемещение будет происходить вдоль той же прямой, параллельной плоскости $П_2$. На практике перемещение точки A в положение A^2 происходит, минуя положение A^1. Иными словами, фронтальная проекция точки перемещается произвольно, а горизонтальная — только вдоль линии, параллельной фронтали. При этом геометрические размеры проекций геометрических тел, относительно которых происходит плоскопараллельное перемещение, остаются неизменными.

Рис. 7.10



На комплексном чертеже (рис. 7.10) соответствующее преобразование будет выражаться в перемещении фронтальной проекции точки в произвольном направлении, а на горизонтальной проекции — в перемещении вдоль горизонтальной линии, а в общем случае — в перемещении вдоль линии, параллельной линии пересечения плоскостей проекций. Таким образом, при плоскопараллельном преобразовании сам поворот вокруг проецирующей оси нет необходимости показывать.

Пример 28

Задание: определить величину двугранного угла (рис. 7.11).

Решение: для того чтобы показать натуральную величину двугранного угла, необходимо, чтобы две грани по отношению к плоскости проекций заняли положение проецирующих плоскостей. Плоскость займет проецирующее положение, если линия, принадлежащая этой плоскости, будет перпендикулярна плоскости проекций. В данном случае ребро AB будет общим для двух граней.

Первое преобразование, в результате которого ребро AB становится параллельным горизонтальной плоскости проекций, осуществим путем вращения вокруг фронтально проецирующей оси и параллельного переноса относительно этой же плоскости. Тогда фронтальная проекция ребра AB займет положение горизонтальной прямой уровня ($A_2^1 B_2^1$).

Второе преобразование, в результате которого ребро AB становится фронтально проецирующим, осуществим путем вращения вокруг гори-

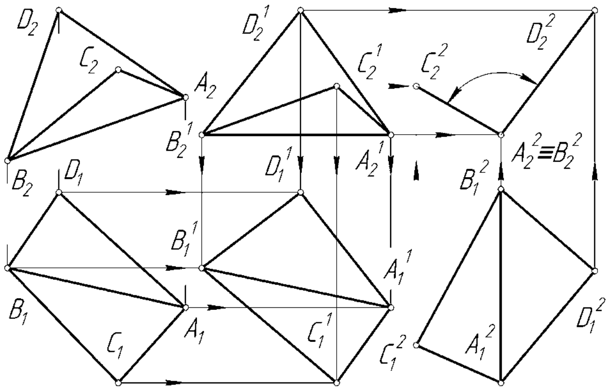


Рис. 7.11

зонтально проецирующей оси и параллельного переноса относительно этой же плоскости. Тогда фронтальная проекция ребра AB (вершина двугранного угла) будет проецироваться в точку (на рисунке 7.11 — $A_2^2 \equiv B_2^2$). Таким образом, грани угла на фронтальной проекции вырождаются в отрезки прямых линий, между которыми определяется искомая величина угла.

7.5. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КОМПЛЕКСНОГО ЧЕРТЕЖА СПОСОБОМ ВРАЩЕНИЯ ВОКРУГ ПРЯМОЙ УРОВНЯ

Вращение вокруг прямой уровня применяется для плоских фигур в основном для решения метрических задач. Суть метода состоит в том, чтобы в результате преобразования получить плоскую фигуру, параллельную плоскости проекций. В этом случае получаем проекцию, конгруэнтную самой фигуре. На рисунке 7.12 показан треугольник ABC, который в результате вращения вокруг горизонтальной прямой уровня переведен в положение (A_1BC_1), параллельное плоскости проекций Π_1. В этом случае на горизонтальной проекции треугольник будет проецироваться в натуральную величину ($A_1^1B_1C_1^1$). В результате вращения проекции точки переместились вдоль перпендикуляров к проекции горизонтальной прямой уровня.

Преобразование комплексного чертежа показано на рисунке 7.13. Вращение треугольника ABC произведено вокруг горизонтальной прямой уровня.

Для того чтобы треугольник спроецировать в натуральную величину на горизонтальную плоскость проекций, достаточно показать натуральную величину радиуса вращения точки A, т. е. определить натуральную величину перпендикуляра, опущенного из точки A на горизонталь h. Натуральная величина определена с помощью правила прямоугольного треугольника и отложена вдоль перпендикуляра к h_1. Так как точка 1 находится на оси вращения, то она неподвижна, поэтому, построив прямую через точки A_1^1 и 1_1 до пересечения с перпендикуляром, опущенным из точки C_1 на горизонталь, получим новое положение проекции точки C — C_1^1.

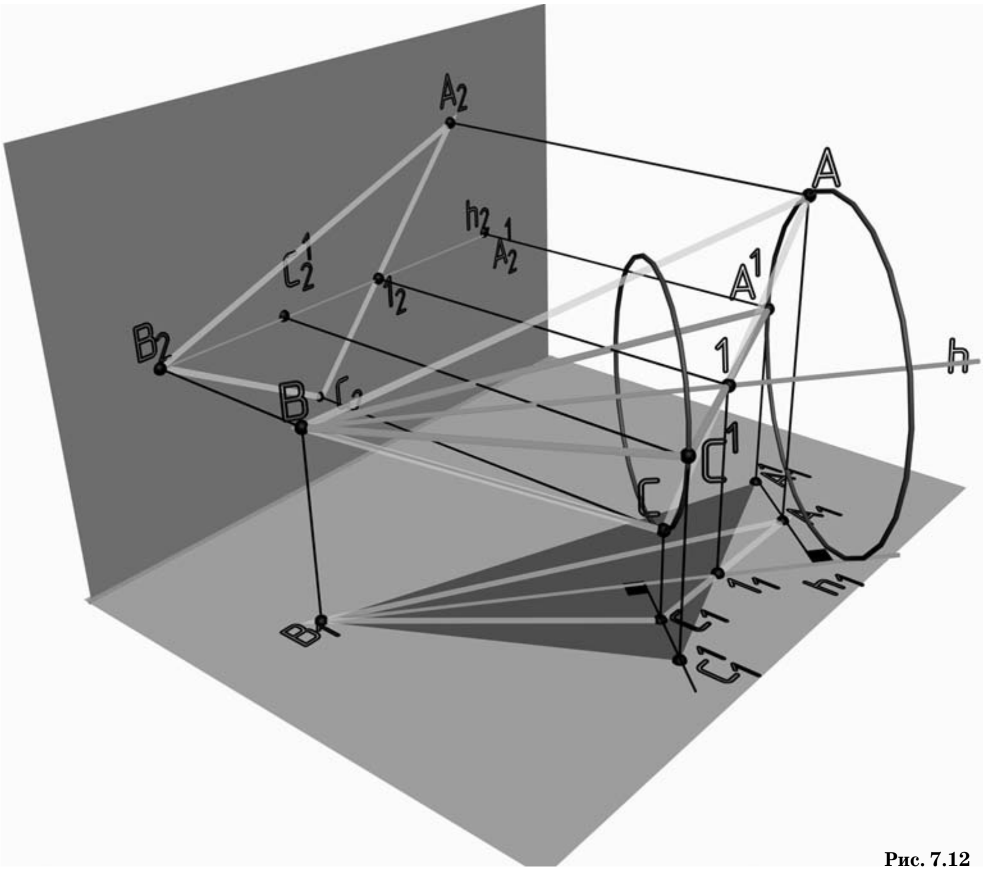


Рис. 7.12

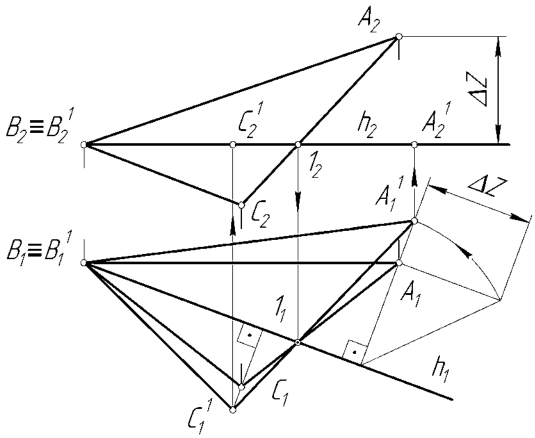


Рис. 7.13

Таким образом, на горизонтальной проекции получили натуральную величину треугольника. При этом на фронтальной плоскости проекций треугольник будет проецироваться в виде отрезка прямой линии.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Объяснить цель преобразования комплексного чертежа.
2. Описать сущность способа замены плоскостей проекций.
3. Что такое база отсчета?
4. Какие размеры переносятся на дополнительную плоскость проекций?
5. Описать сущность способов вращения вокруг проецирующей прямой и плоскопараллельного перемещения.
6. Объяснить, для чего применяют способ вращения вокруг прямой уровня.
7. Как располагаются дополнительные плоскости относительно плоскостей проекций комплексного чертежа?
8. Сформулировать преимущества и недостатки каждого из способов преобразования комплексного чертежа.
9. Привести примеры практического применения способов преобразования комплексного чертежа.
10. Какова последовательность решения задач по определению натуральной величины элементов пространственных объектов способом плоскопараллельного перемещения?

8 МНОГОГРАННИКИ

Многие пространственные формы представляются нам в виде многогранников — замкнутых пространственных фигур, ограниченных плоскими многоугольниками.

Многогранные формы предметов находят исключительно широкое применение в архитектуре и технике. Форму многогранников имеют детали машин, механизмов, станков и инструментов.

Построение проекций многогранников является логическим продолжением изучения построения изображений объектов от простого к сложному, поскольку они уже представляют пространственные конструкции, соответствующие настоящим деталям.

Кроме того, необходимо знать взаимное расположение многогранников с другими геометрическими объектами.

8.1. ОБЩИЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Многогранник — это пространственная фигура, образованная плоскими многоугольниками, называемыми гранями. Линии пересечения плоских фигур называют ребрами, точки пересечения ребер — вершинами (рис. 8.1).

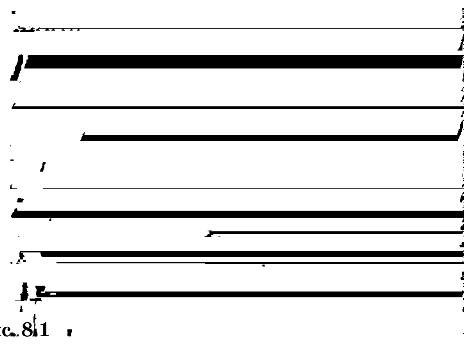


Рис. 8.1

При конструировании многих инженерных сооружений, имеющих кривые поверхности, их часто заменяют (аппроксимируют) близкими по форме гранными поверхностями. Атомная структура металлических материалов имеет кристаллическую структуру, которая также имеет форму многогранников.

Рассмотрим те многогранники, которые чаще встречаются в деталях, а значит, на технических чертежах (рис. 8.1, 8.3).

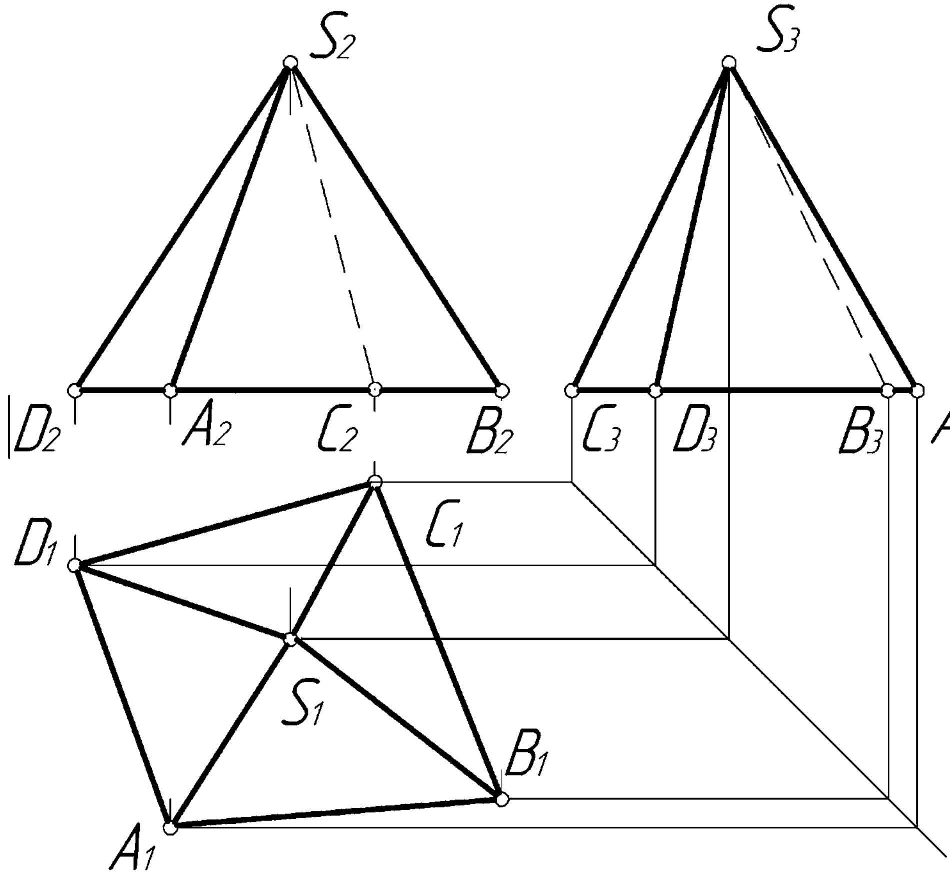


Рис. 8.2

Пирамидой называют многогранник, одна грань которого — многоугольник, является основанием, а все остальные — треугольники с общей вершиной — гранями боковой поверхности. Правильная пирамида имеет в основании правильный многоугольник. Если высота (перпендикуляр, опущенный из вершины пирамиды на основание) проходит через центр основания, пирамида называется прямой. На рисунке 8.1 показано наглядное изображение пирамиды, а на рисунке 8.2 — ее комплексный чертеж.

Призмой называют многогранник, две грани которого, называемые основаниями, — одинаковые многоугольники со взаимно параллельными сторо-

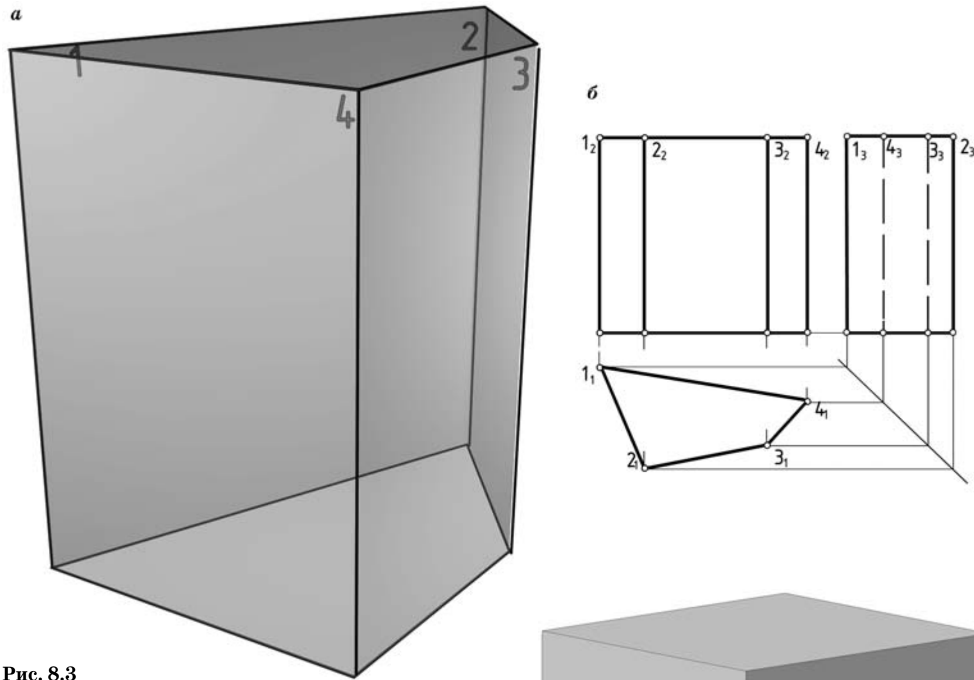


Рис. 8.3

нами, а все другие грани — параллелограммы. Призма называется прямой, если ее боковые ребра перпендикулярны плоскости основания. Если основанием призмы является прямоугольник, то ее называют параллелепипедом. На рисунке 8.3*а* показано наглядное изображение призмы, а на рисунке 8.3*б* — ее комплексный чертеж.

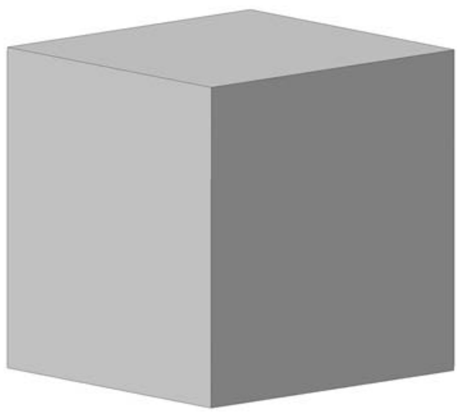


Рис. 8.4

Как видно из комплексного чертежа, обычно обозначают только верхние вершины ребер призмы. Необходимо отметить, что для решения некоторых задач приходится мысленно увеличивать высоту призмы или пирамиды, поэтому эту часть будем считать мнимой.

Частным случаем призмы является куб — многогранник с одинаковыми квадратными гранями (рис. 8.4). Если направление проецирования перпендикулярно грани куба, то на всех трех проекциях комплексного чертежа имеем одинаковые квадраты.

8.2. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПРЯМОЙ И МНОГОГРАННИКА

Точки пересечения прямой и многогранника определяются способом вспомогательных поверхностей, рассмотренным при определении точки пересечения прямой и плоскости. В качестве поверхности-посредника выбираем проецирующую плоскость, проходящую через прямую, находим линию пересечения плоскости-посредника с многогранником и определяем общие точки сечения плоскости и прямой, которые и будут точками пересечения прямой с многогранником. По известным правилам определяем видимость прямой. Пример определения точек пересечения прямой и многогранника будет рассмотрен ниже.

8.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЛИНИИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ МНОГОГРАННИКА С ПРОЕЦИРУЮЩЕЙ ПЛОСКОСТЬЮ

Линия пересечения плоскости и многогранника определяется *способом ребер* или *способом граней*. Первый способ заключается в следующем: определяем точки пересечения проецирующей плоскости с ребрами многогранника (рис.8.5*а*). Второй способ: определяем линии пересечения проецирующей плоскости и граней многогранника (рис. 8.5*б*).

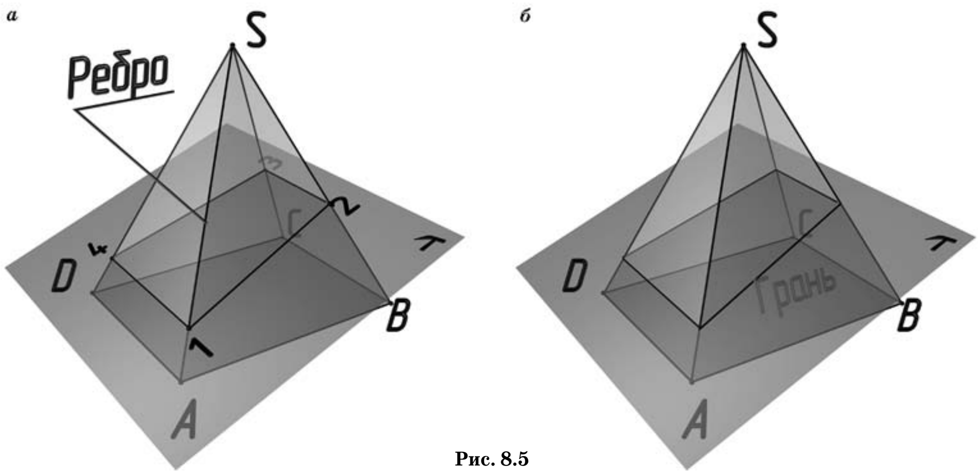


Рис. 8.5

Пример 29

Задание: построить горизонтальную и профильную проекции линии пересечения пирамиды с плоскостью τ (рис. 8.6).

Решение выполняем **способом ребер**.

1. Показываем фронтальные проекции точек пересечения ребер с плоскостью τ.

2. По линиям связи определяем горизонтальные и профильные проекции точек пересечения.

3. Соединяем соответствующие проекции точек пересечения и показываем проекции линии пересечения, одновременно обозначая видимость.

При определении точек пересечения в качестве посредника выбирают проецирующую плоскость.

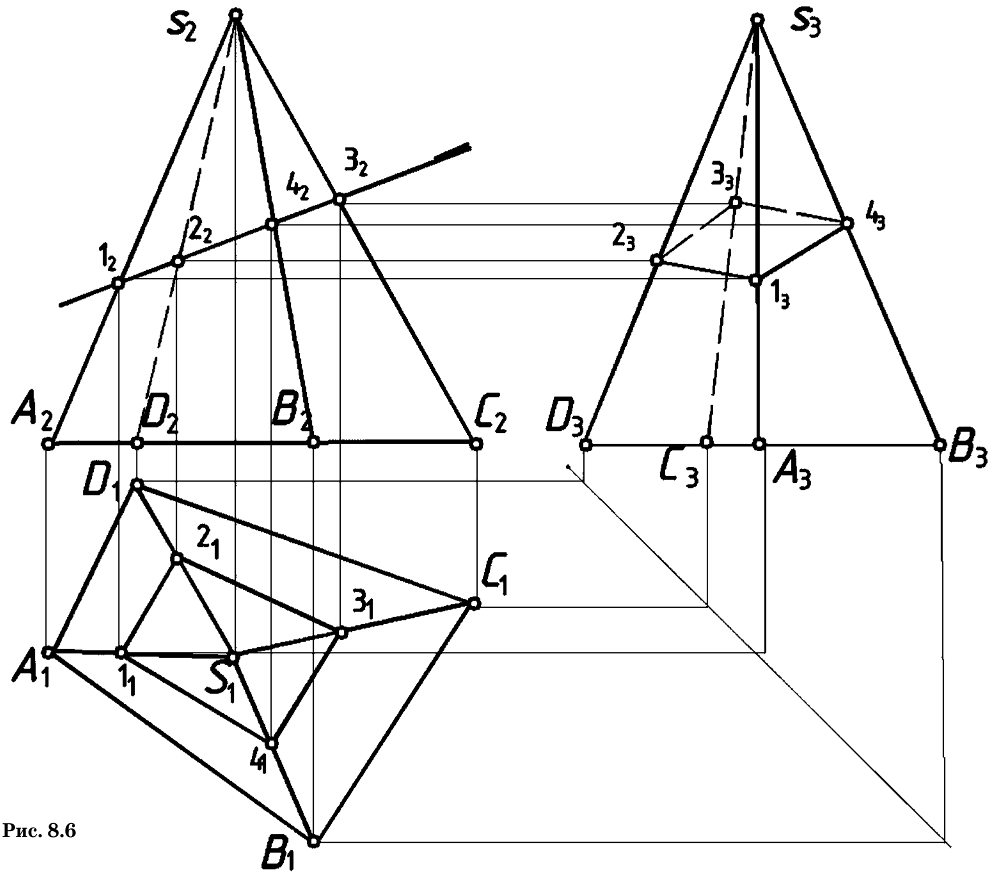


Рис. 8.6

8.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТОЧЕК ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ПРЯМОЙ ЛИНИИ С МНОГОГРАННИКОМ

В качестве примера рассмотрим определение проекций точек пересечения прямой l и многогранника $SABCD$. На рисунке 8.7 показано наглядное изображение. Как видим из рисунка, плоскость-посредник расположена таким образом, чтобы ей принадлежала прямая l. Поэтому на линии пересечения многогранника и плоскости будут находиться точки пересечения прямой линии и многогранника.

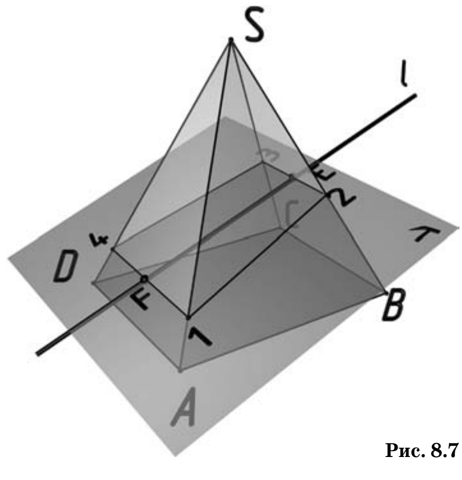


Рис. 8.7

На рисунке 8.8 показан комплексный чертеж определения точек пересечения пирамиды с прямой l. Показываем поверхность-посредник —

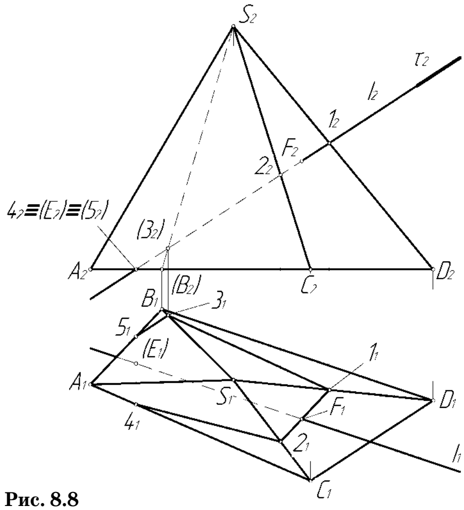


Рис. 8.8

фронтально проецирующую плоскость τ, проходящую через прямую l, и определяем линию пересечения пирамиды этой плоскостью. Задачу решаем двумя способами: способом ребер для ребер SB, SC и SD находим фронтальные проекции точек пересечения ребер с плоскостью τ — 1_2, 2_2 и 3_2, а для проекций точек 4 и 5 используем способ граней (линия пересечения основания пирамиды и проецирующей плоскости — фронтально проецирующая прямая 45).

Соединяем проекции горизонтальных точек пересечения и получаем горизонтальную проекцию линии пересечения пирамиды с фронтально проецирующей плоскостью, в которой расположены прямая l и сечение.

Точки пересечения пирамиды и прямой l определяем по горизонтальной проекции как проекции точек пересечения проекции прямой l с отрезками [12] и [45] — F и E.

На горизонтальной проекции невидимая часть линии — E_1F_1, так как участки ребер $1S$, $2S$ и $3S$ будут видимыми.

По горизонтальной проекции определяем, что точки прямой, находящиеся правее точки F, будут ближе, чем точки, принадлежащие пирамиде, а это значит, что на фронтальной проекции данного участка будет видна часть прямой l.

В качестве посредника не всегда удобно использовать плоскости. В частности, часто используют прямые линии, принадлежащие граням многогранника. На рисунке 8.9 показан пример определения точки пересечения проецирующих прямых l и m с пирамидой.

Пример 30

Задание: определить точки встречи прямых m и l с пирамидой и видимость участков прямой (рис. 8.9).

Решение: для прямой m (рис. 8.9) в качестве посредника удобно воспользоваться прямой линией. Целесообразно на горизонтальной проекции провести проекцию прямой GS, проходящей через проекции вершины пирами-

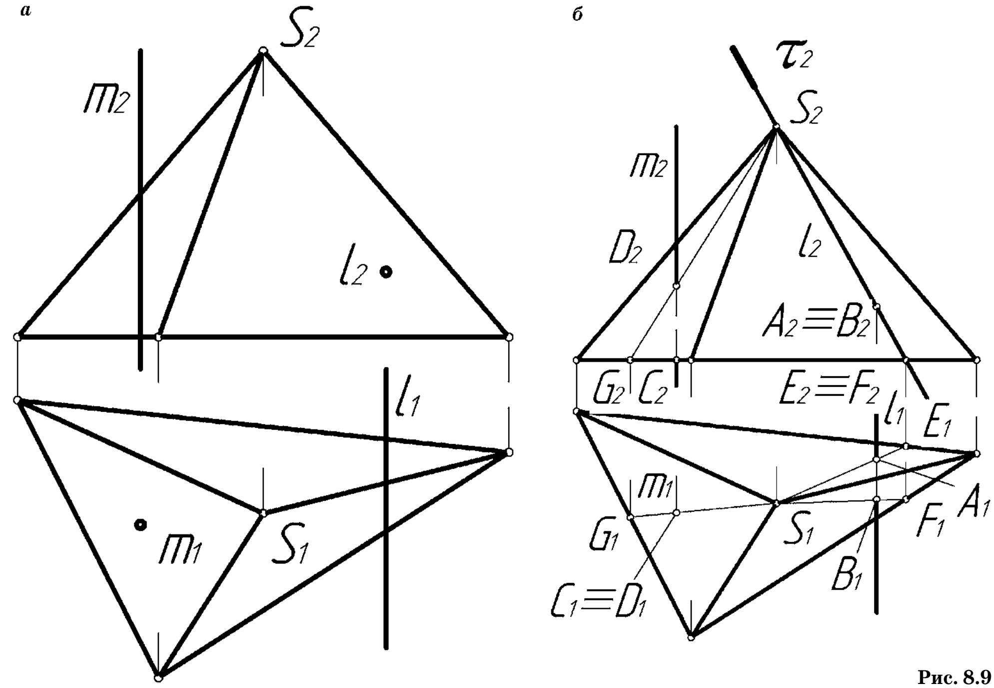


Рис. 8.9

ды S_1, проекцию прямой m_1 и проекцию точки на основании пирамиды G_1. Далее показываем фронтальную проекцию этой прямой и определяем проекцию верхней точки пересечения D_2. Проекция нижней точки C_2 находится на основании пирамиды. Горизонтальные проекции точек C и D находятся на проекции прямой m_1.

Для прямой l (рис. 8.9) целесообразно через фронтальную проекцию вершины пирамиды провести фронтально проецирующую плоскость, пересекающую основание пирамиды по фронтально проецирующей прямой, которой принадлежат точки E и F. Пересечение треугольника $E_1F_1S_1$ и прямой l_1 определяет горизонтальные проекции точек A и B, которые будут точками пересечения прямой l и пирамиды. По линии связи определяем фронтальные проекции этих точек. Видимость определяем известными способами.

8.5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЛИНИИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ МНОГОГРАННИКА С ПЛОСКОСТЬЮ ОБЩЕГО ПОЛОЖЕНИЯ

Линия пересечения многогранника с плоскостью общего положения определяется двумя способами: способом ребер или способом граней. Кроме того, *решение* задачи можно упростить, выполнив преобразование комплексного чертежа таким образом, чтобы секущая плоскость заняла проецирующее положение. Рассмотрим следующие *задачи*.

Нужно построить линию пересечения призмы с плоскостью общего положения $\Sigma(f \cap h)$ (рис. 8.10).

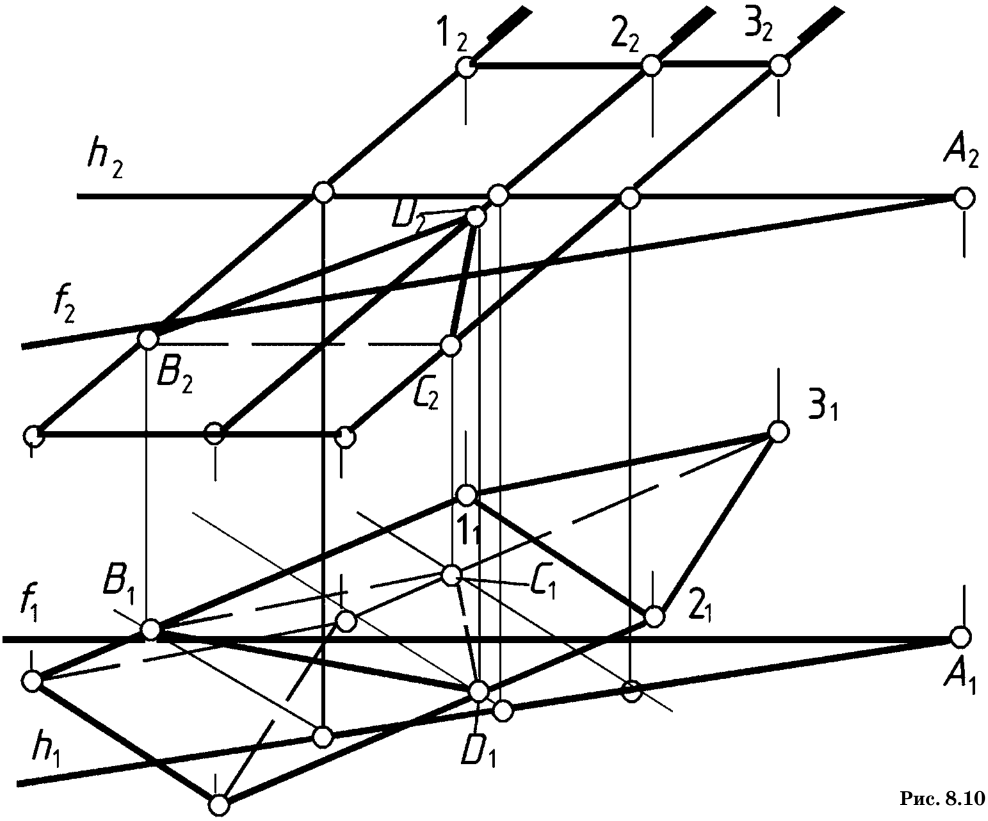


Рис. 8.10

Решение выполним способом ребер. Находим точки пересечения ребер с плоскостью $\Sigma(f \cap h)$. В качестве плоскостей-посредников выбираем фронтально проецирующие плоскости. Отметим, что горизонтальные проекции линий пересечения проецирующих плоскостей, проведенных через ребра 1, 2 и 3, с плоскостью $\Sigma(f \cap h)$ будут параллельны. Таким образом, задача сводится к определению точки пересечения прямой и плоскости общего положения. Ребро 1 пересечет плоскость в точке B, ребро 2 — в точке D, а ребро 3 — в точке C.

Видимость линий определяем по видимости ребер, на которых находятся точки сечения. Так, $[B_1C_1]$ и $[C_1D_1]$ будут невидимыми, потому что проекция точки C находится на невидимом ребре. На горизонтальной проекции видно, что грань 13 находится дальше от наблюдателя. Поэтому на фронтальной проекции линия пересечения на этой грани будет не видна.

Следующая задача решается путем преобразования комплексного чертежа. Необходимо определить линию пересечения пирамиды $SDEF$ с плоскостью общего положения Σ(ΔABC) (рис. 8.11).

Необходимо преобразовать комплексный чертеж таким образом, чтобы плоскость $\Sigma(\Delta ABC)$ стала проецирующей. Дополнительную плоскость проекций выбираем перпендикулярно плоскости проекций Π_1 и стороне $[AB]$. Последняя будет параллельна горизонтальной прямой уровня, так как ее фрон-

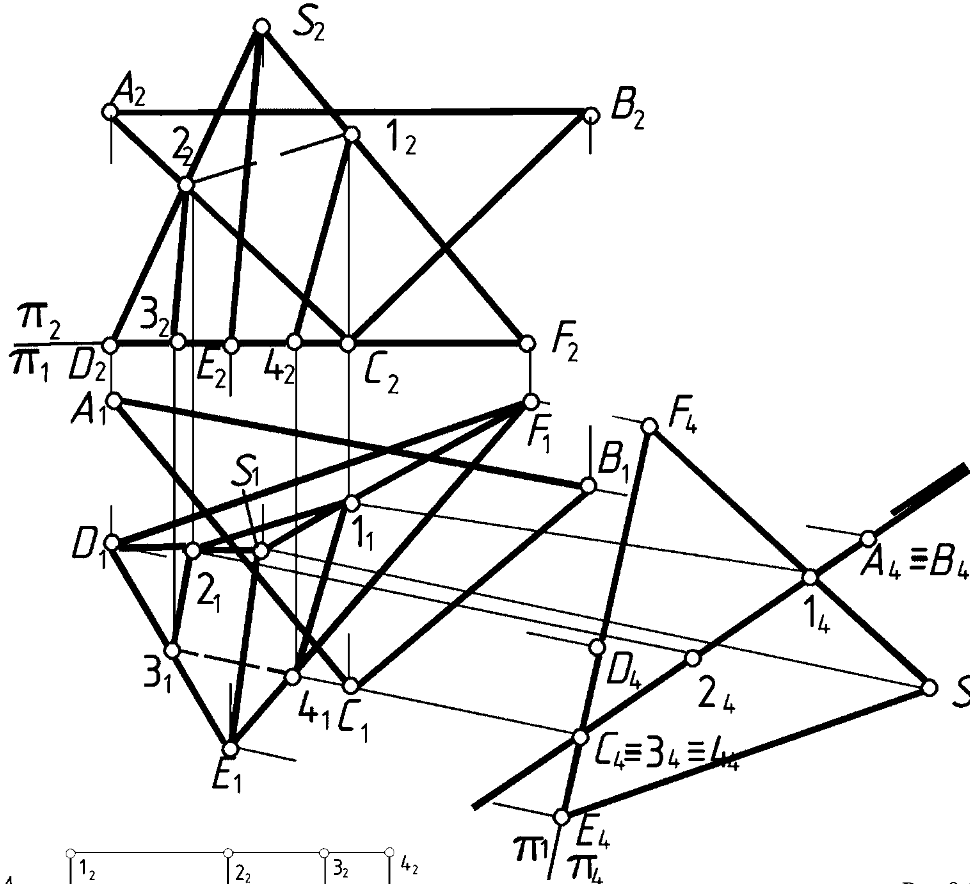


Рис. 8.11

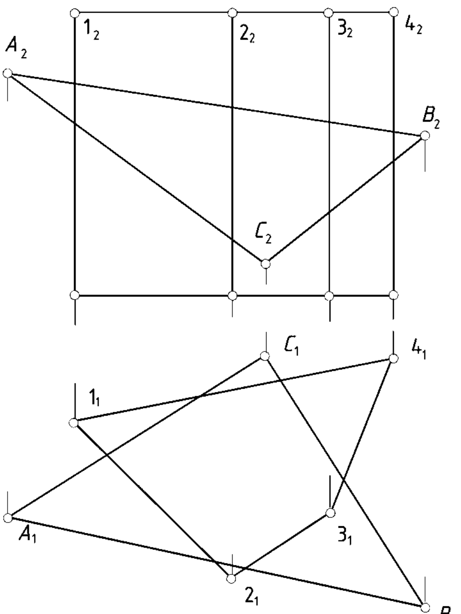


Рис. 8.12

тальная проекция горизонтальна. На дополнительной плоскости проекций Π_4 отрезок [AB] будет проецироваться в точку, а значит, ΔABC — в прямую линию. Проекции точек линии пересечения 1, 2 определяем способом ребер.

Проекции точек 3 и 4 определяем способом граней: находим линию пересечения двух плоскостей — заданной ΔABC и основания (грани) пирамиды DEF, как двух проецирующих плоскостей.

Пример 31

Задание: определить линию пересечения призмы 1234 и плоскости, заданной в виде треугольника ABC (рис. 8.12).

Решение задачи можно провести двумя способами: способом ребер и способом граней. Рассмотрим оба способа.

По способу граней будем находить линии пересечения грани и плоскости (рис. 8.13). Грани являются горизонтально проецирующими, поэтому линия пересечения определена на горизонтальной плоскости проекций: естественно, она лежит на поверхности призмы, т. е. на четырехугольнике $1_1 2_1 3_1 4_1$. Если плоскость пересечет основание призмы, то тогда эта линия будет проходить по основанию призмы, что определится в ходе решения задачи.

Таким образом, задача сводится к определению фронтальной проекции линии пересечения. Для ребра 12 линия определится по двум точкам 5 и 6. Точка 5 лежит на стороне треугольника AC, а точка 6 — на стороне AB. Оп-

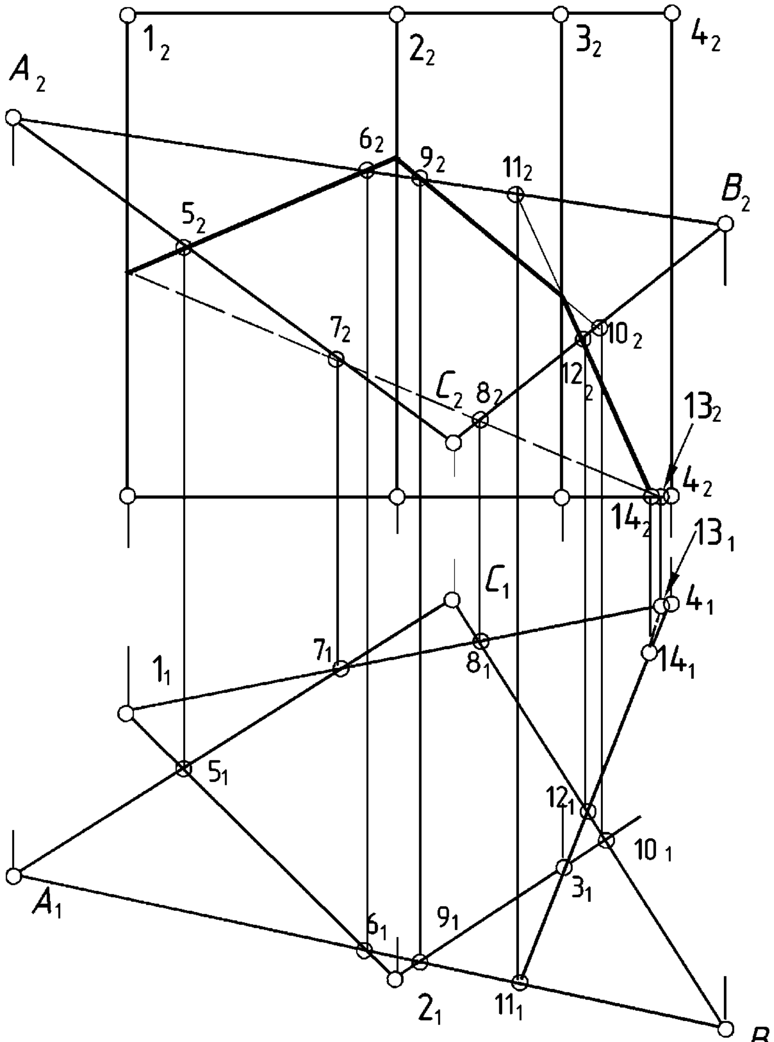


Рис. 8.13

ределяем их положения по горизонтальной проекции, а затем по линиям связи на фронтальной проекции. Соединяя точки 5_2 и 6_2, получаем отрезок на грани 12. По точкам 7 и 8 определяем линию пересечения на грани 14. Для того чтобы определить линию пересечения с гранью 23, необходимо продлить ее горизонтальную проекцию до пересечения с *CB*. Отметим, что часть отрезка линии $11_2 12_2$ не принадлежит призме. Аналогично определяем линию пересечения с гранью 34. По фронтальной проекции видим, что плоскость пересекает призму по точкам 13 и 14. По линиям связи определяем положение их горизонтальных проекций.

Второе решение выполняем способом ребер. Находим точки пересечения каждого ребра с плоскостью $\Sigma(\Delta ABC)$ (рис. 8.14). На ребре 1 располагается точка *D*. На горизонтальной проекции видно, что ее проекция

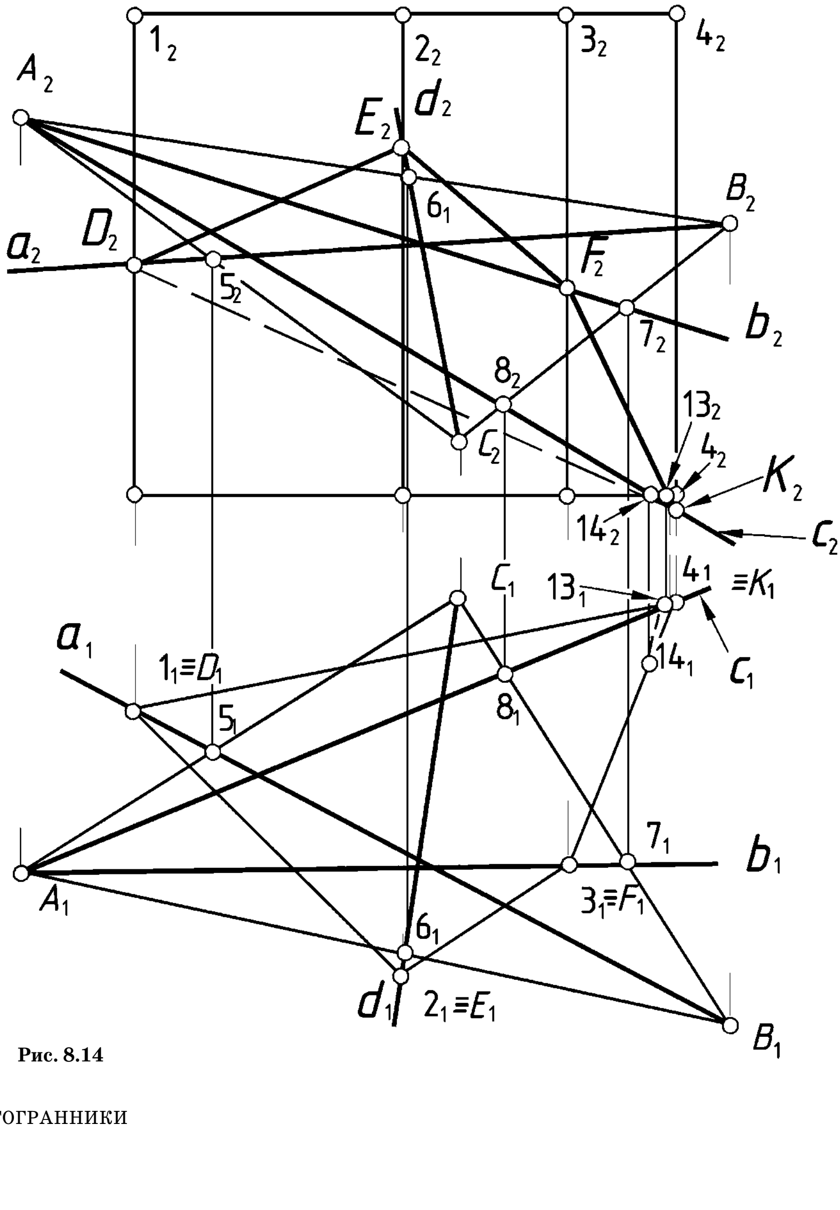


Рис. 8.14

совпадает с проекцией ребра 1. Так как точка D принадлежит плоскости $\Sigma(\Delta ABC)$, то проводим линию a, проходящую через проекции точек D_1 и B_1. Далее находим фронтальную проекцию линии a по точке 5_2, проведя линию связи 5_1–5_2. На пересечении линий a_2 и 1_2 отмечаем точку D_2. Для ребра 2 на горизонтальной проекции показываем линию d_1, которая проходит через проекции точки C_1 и ребра 2_1. На этой линии располагается проекция точки E_1. По линии связи находим ее фронтальную проекцию на проекции линии d_2. Произведя подобные построения для остальных ребер, находим положение точек F и K. Причем точка K находится ниже основания призмы, что говорит о том, что плоскость $\Sigma(\Delta ABC)$ пересекает основание (рис. 8.14). Соединяем найденные точки пересечения и показываем фронтальную проекцию линии пересечения призмы и плоскости $\Sigma(\Delta ABC)$.

По горизонтальной проекции определяем, что грань призмы 14 находится дальше от наблюдателя, значит, на фронтальной проекции она не будет видна, соответственно не видны будут все линии, расположенные на ней. Значит, линия пересечения $D_2 1 3_2$ также будет не видна.

8.6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЛИНИИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ МНОГОГРАННИКОВ

Две поверхности пересекаются по линии, точки которой принадлежат каждой из пересекающихся поверхностей. Так как грани многогранников — плоские фигуры, то они пересекаются по прямым линиям, а следовательно, линией пересечения многогранников будет пространственный многоугольник. Стороны многоугольника определяем как линии пересечения двух плоскостей известными способами — способом ребер или способом граней. В качестве примера на рисунке 8.15 приведена задача по определению линии пересечения двух призм.

По горизонтальной проекции определяем точки 3, 4 и 5, 6 (пересечение ребер B и C одной призмы с гранями DE и EF другой призмы). На профильной проекции определяем точки 1 и 2 (пересечение ребра E и граней AB и AC).

По линиям связи показываем остальные проекции точек пересечения проецирующих граней одной призмы с ребрами другой призмы. Соединяем их и определяем видимость линии пересечения многогранников.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Что называют многогранником?
2. В чем состоит сущность способа ребер?
3. В чем состоит сущность способа граней?
4. Как определяется линия пересечения многогранника с проецирующей плоскостью?
5. Как определяется линия пересечения многогранника с плоскостью общего положения (способ граней, способ ребер и способ замены плоскостей проекций)?

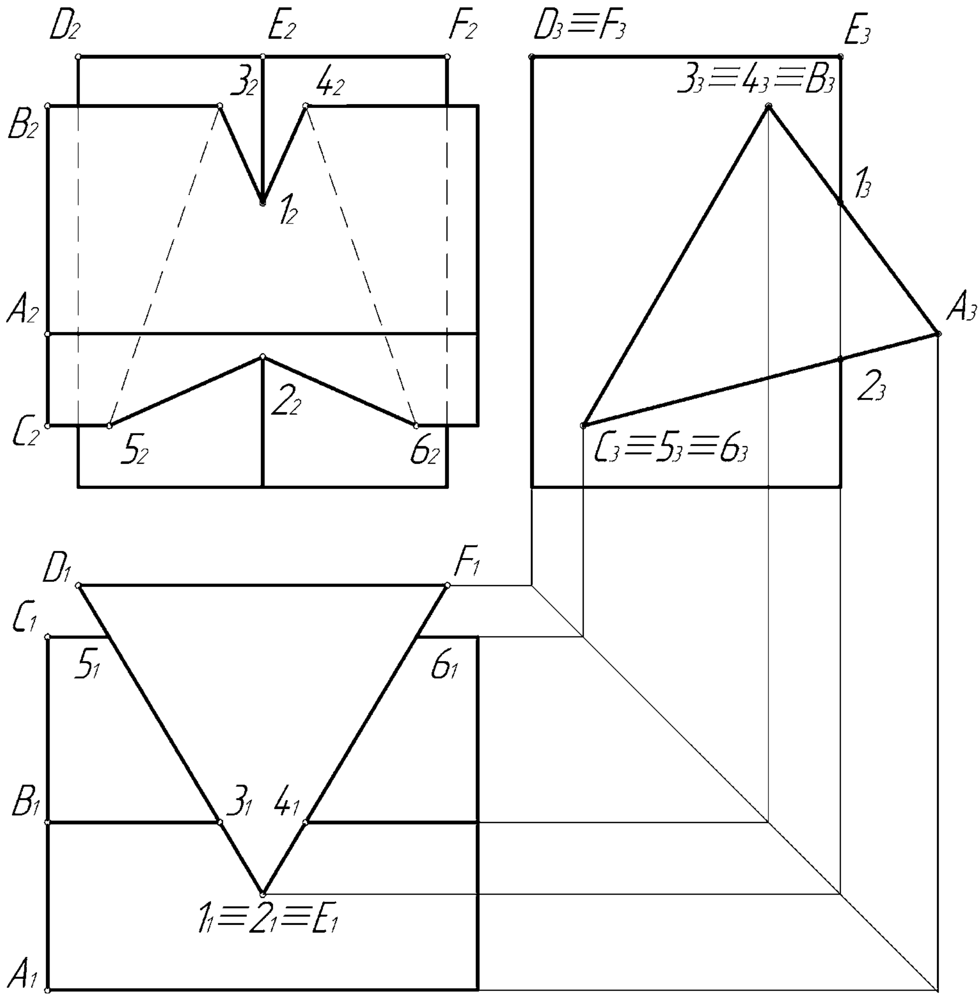


Рис. 8.15

6. Как определяются точки пересечения многогранника с прямой линией?
7. Как определяется линия пересечения многогранников?
8. Какой способ применяется для определения видимости элементов пересекающихся многогранников?
9. Какими характерными признаками обладает куб на комплексном чертеже?
10. Перечислить элементы многогранника.
11. Какие многоугольники называют основаниями многогранников?
12. Назвать характерные признаки прямого и правильного многогранника.
13. Какое практическое применение имеют гранные поверхности при конструировании инженерных сооружений, имеющих кривые поверхности?

9 ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ

Поверхности вращения и ограничиваемые ими тела имеют весьма широкое применение во всех областях техники. Многие детали можно рассматривать как самостоятельные поверхности вращения, другие поэлементно получаются обработкой заготовок, вращающихся относительно какой-либо оси (токарная обработка) или при помощи режущего инструмента основанного на принципе вращения: сверла, фрезы и т. д. Поэтому возникает необходимость изучения способов образования таких поверхностей и их сочетания с другими геометрическими объектами.

9.1. ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ ОБЩЕГО ВИДА

Поверхностью вращения общего вида называется поверхность, образованная плоской кривой, называемой образующей (g), при ее вращении вокруг неподвижной оси (i) (рис. 9.1).

Каждая точка образующей (A, B, C, D, E) при вращении вокруг оси i описывает окружность с центром на оси вращения. Эти окружности называют *параллелями*, а наибольшую и наименьшую параллель — соответственно *экватором* и *горлом* (шейкой).

Плоскости α, проходящие через ось поверхности вращения, называют *меридиональными*, а линии, по которым они пересекают поверхность, — *меридианами*.

Меридиональную плоскость α_1, параллельную плоскости проекции, принято называть *главной меридиональной плоскостью*, а линию ее пересечения с поверхностью вращения — *главным меридианом*.

Задание поверхности вращения на комплексном чертеже проекциями геометрических фигур, входящих в состав

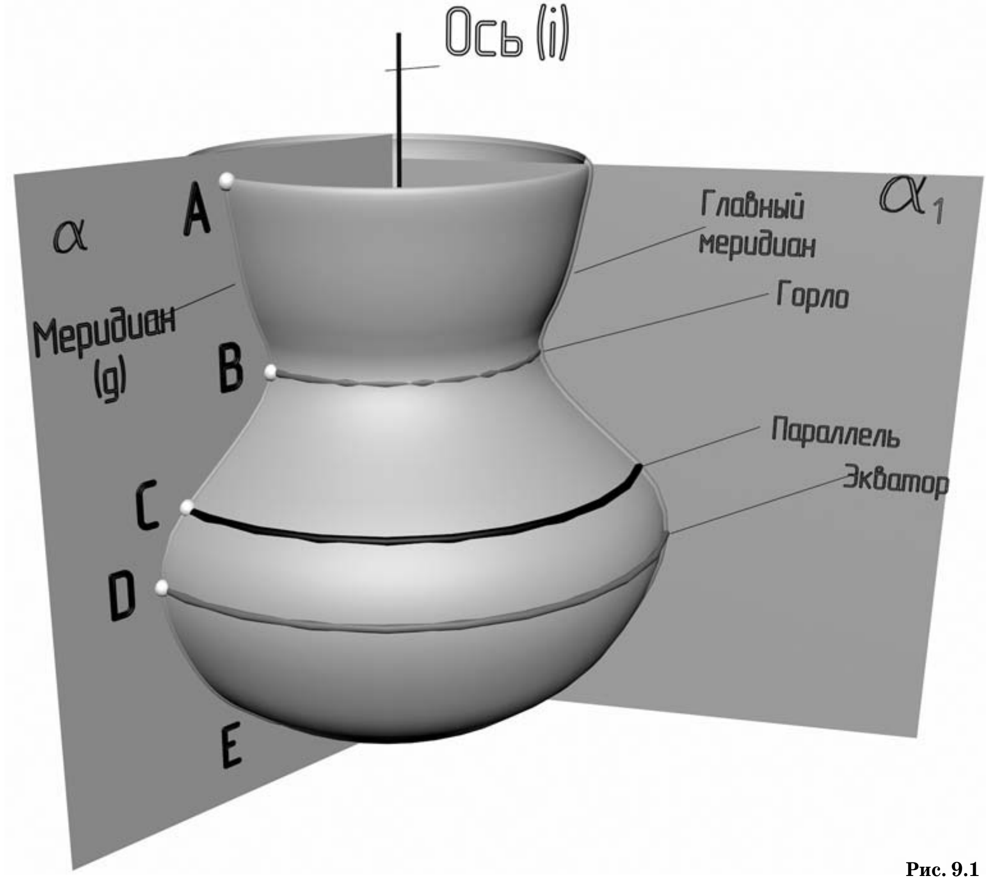


Рис. 9.1

его определителя, хотя и однозначно определяет поверхность, но обладает одним недостатком, заключающимся в том, что при таком задании трудно представить форму поверхности. Поэтому при задании поверхности вращения обычно указывают проекции ее оси, главного меридиана и экватора (иногда указывают окружность, по которой поверхность вращения пересекается с плоскостью проекций). При этом указывают только горизонтальную проекцию экватора (или параллели) и фронтальную проекцию главного меридиана.

9.2. ЧАСТНЫЕ ВИДЫ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВРАЩЕНИЯ

В технике, в частности в машиностроении, поверхности вращения находят широкое применение. Это объясняется распространенностью вращательного движения и простотой обработки поверхностей вращения на станках. Особенно распространены поверхности, имеющие в меридиональном сечении кривую второго порядка или две прямые.

Рассмотрим некоторые частные виды поверхностей вращения.

Конической поверхностью называется всякая поверхность, порождаемая движением прямой линии (образующей), проходящей через неподвижную точку — вершину поверхности S (рис. 9.2). Уравнение поверхности:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$

Коническую поверхность можно получить и другим образом, если принять за образующую поверхности конуса окружность, радиус которой пропорционально изменяется с перемещением ее центра вдоль оси вращения. Это говорит о том, что одну и ту же поверхность можно задавать различными способами.

Обычно, для решения задач достаточно одной нижней или верхней части конической поверхности. При ее пересечении плоскостью получаем геометрическую поверхность, которую называют конусом вращения (рис. 9.3). Часть плоскости, ограниченная конической поверхностью, называется основанием конуса.

Цилиндр вращения получается пересечением двумя плоскостями поверхности, образующей которой является прямая линия, параллельная оси вращения (рис. 9.4*а*). Уравнение поверхности цилиндра:

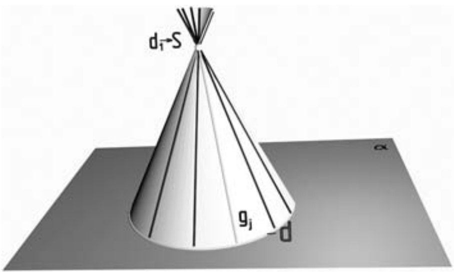


Рис. 9.2

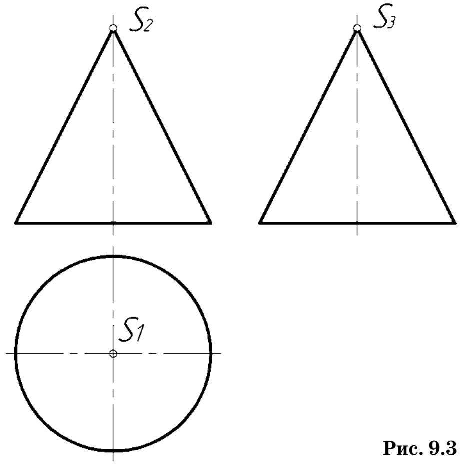


Рис. 9.3

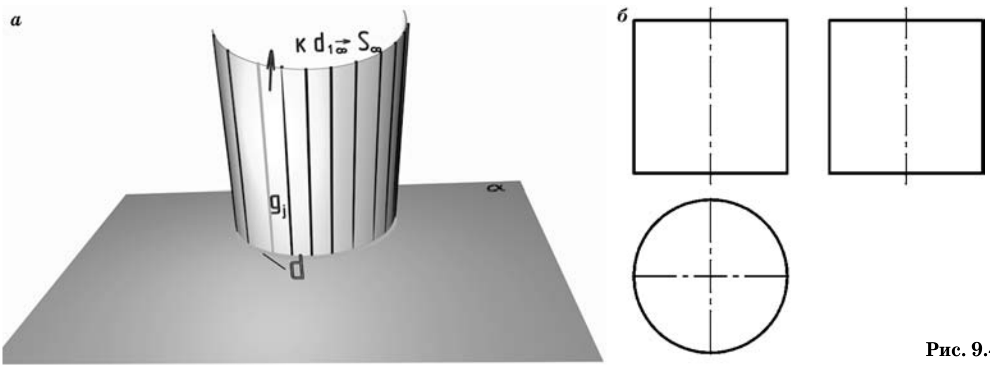


Рис. 9.4

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Так же, как и коническую поверхность, цилиндрическую поверхность можно получить и другим образом, если принять за образующую поверхности окружность, радиус которой не изменяется с перемещением ее центра вдоль оси вращения.

На рисунке 9.4*б* показан комплексный чертеж цилиндра вращения. Так как для деталей требуются тела конечной длины, то на чертеже показаны верхнее и нижнее основание.

Возьмем в качестве образующей окружность. В зависимости от взаимного расположения окружности (или ее дуги) и оси вращения можно получить различные поверхности.

Тором называется поверхность, которая может быть получена при вращении окружности g вокруг оси i, лежащей в плоскости этой окружности.

В зависимости от соотношения радиуса R образующей окружности и расстояния t от центра окружности до оси вращения, разновидности поверхности тора имеют следующие варианты.

Открытый тор (или кольцо) — окружность не пересекает ось вращения (рис. 9.5);

$$(x^2 + y^2 + z^2 + t^2 - R^2)^2 = 4t^2(x^2 + y^2),$$

где $t > R$.

Комплексный чертеж открытого тора представлен на рисунке 9.6.

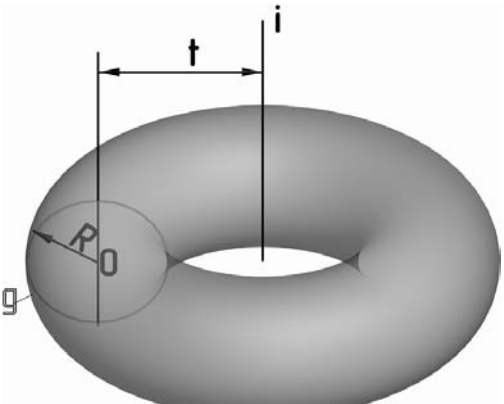


Рис. 9.5

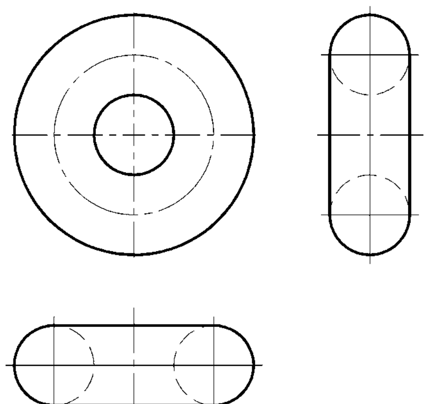


Рис. 9.6

Закрытый тор, образующая окружность которого пересекает ось вращения (самопересекающийся тор) или касается ее (рис. 9.7). Уравнение закрытого тора:

$$(x^2 + y^2 + z^2 + t^2 - R^2)^2 = 4t^2(x^2 + y^2),$$

где $t < R$.

Комплексный чертеж закрытого тора представлен на рисунке 9.8.

Здесь же можно получить *сферу* — поверхность, которая может быть получена при вращении окружности g вокруг оси, принадлежащей оси обра-

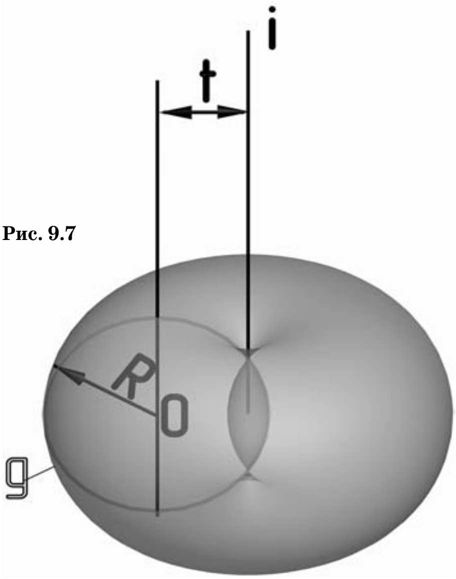


Рис. 9.7

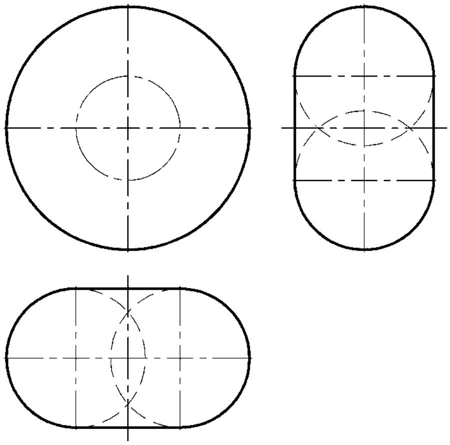


Рис. 9.8

зующей, т. е. сферу можно рассматривать как частный случай тора, у которого $t=0$ (рис. 9.9). Уравнение сферы:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Комплексный чертеж сферы показан на рисунке 9.10.

Гиперболоид вращения — поверхность, образующая прямая которой g не пересекает ось вращения (рис. 9.11). Уравнение поверхности

$$b(x^2 + y^2) - a^2z^2 = a^2b^2.$$

Комплексный чертеж однополостного гиперболоида представлен на рисунке 9.12.

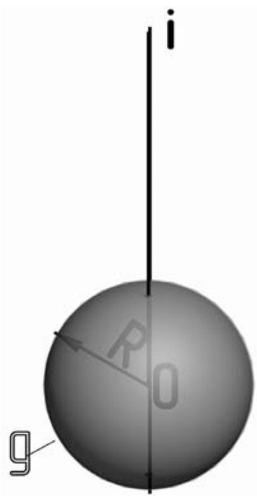


Рис. 9.9

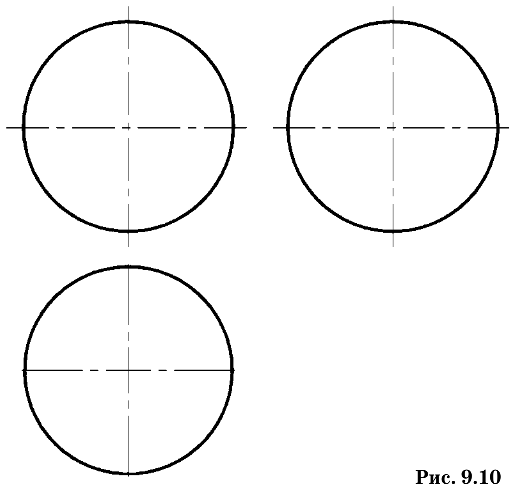


Рис. 9.10

Рис. 9.11

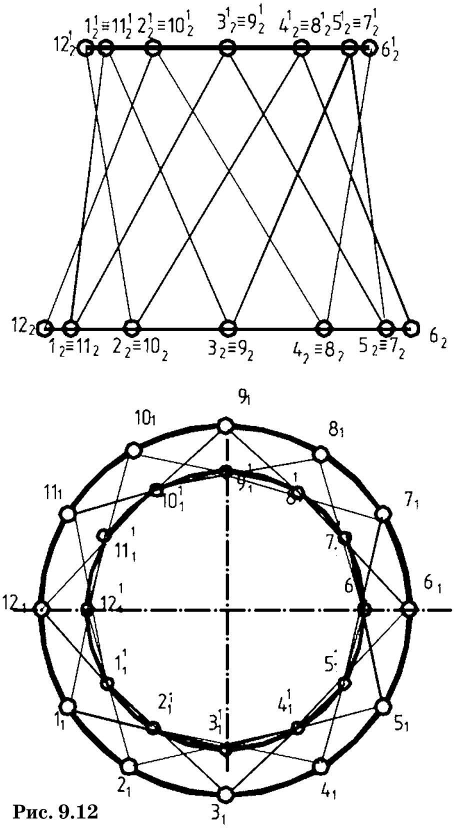


Рис. 9.12

Кроме того, гиперболоид можно получить при вращении вокруг оси гиперболы. Однополостный гиперболоид (рис. 9.13) имеет уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

где a и b — действительные полуоси, а c — мнимая полуось.

Комплексный чертеж однополостного гиперболоида представлен на рисунке 9.14.

Двухполостный гиперболоид (рис. 9.15) задается уравнением

$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

где a и b — мнимые полуоси, а c — действительная полуось.

Если $a=b$, то такая поверхность называется **гиперболоидом вращения**. Однополостный гиперболоид вращения может быть получен вращением гиперболы вокруг ее мнимой оси, двухполостный — вокруг действительной. Двухполостный гиперболоид вращения также является геометрическим местом точек P, модуль разности расстояний от которых до двух заданных точек A и B постоянен: $|AP-BP|=\text{const}$. В этом случае A и B называются *фокусами гиперболоида*.

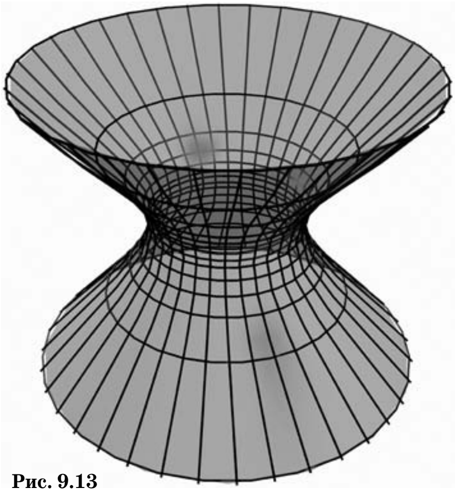


Рис. 9.13

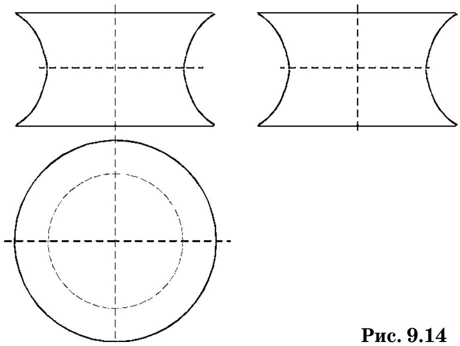


Рис. 9.14

Комплексный чертеж двухполостного гиперболоида представлен на рисунке 9.16.

Чертежи на рисунках 9.6 и 9.8 дают представление об ортогональных проекциях тора, на рисунке 9.10 — сферы. Так как поверхности вращения, изображенные на этих рисунках, симметричны относительно оси i, то их проекции симметричны на тех плоскостях, которым перпендикулярна ось вращения. Поэтому можно вычерчивать не всю проекцию, а лишь ее половину и даже четверть, как это будет показано ниже (конечно, если условия задачи не требуют изображать ее полностью).

Если в качестве образующей выступает эллипс, центр поверхности (точка, в которой все хорды, через нее проходящие, делятся пополам) помещен в начале системы координат, а за оси координат взяты оси симметрии поверхности (при этом координатные плоскости являются плоскостями сим-

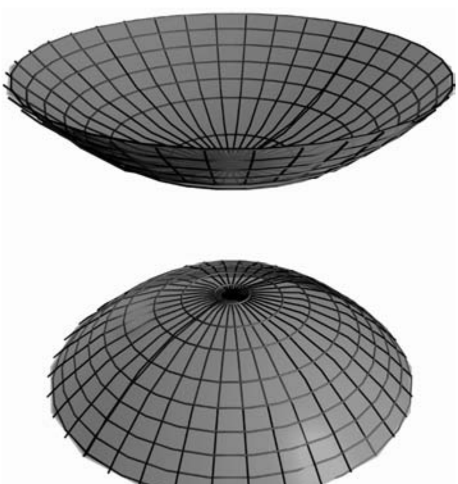


Рис. 9.15

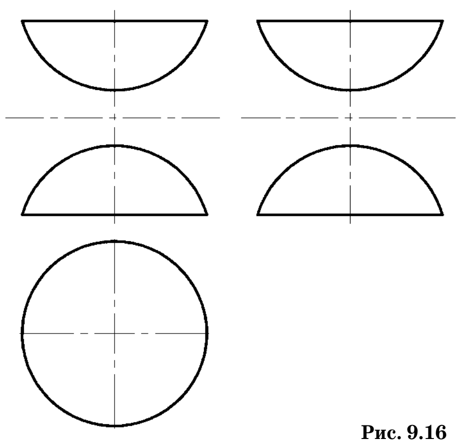


Рис. 9.16

метрии), поверхностью вращения будет *эллипсоид*, описываемый в канонической форме уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

где a, b, c — полуоси.

Если $a=b>c$, имеем *сжатый* (*сплющенный*) *эллипсоид вращения*, получающийся от вращения вокруг малой оси эллипса, лежащего в плоскости xOz. Если $a=b<c$, имеем *вытянутый эллипсоид вращения* (рис. 9.17*а*), получающийся от вращения вокруг большой оси эллипса, лежащего в плоскости xOz. Комплексный чертеж вытянутого эллипсоида представлен на рисунке 9.17*б*. Уравнение поверхности вытянутого эллипсоида:

$$b^2(x^2+y^2)+a^2z^2=a^2b^2.$$

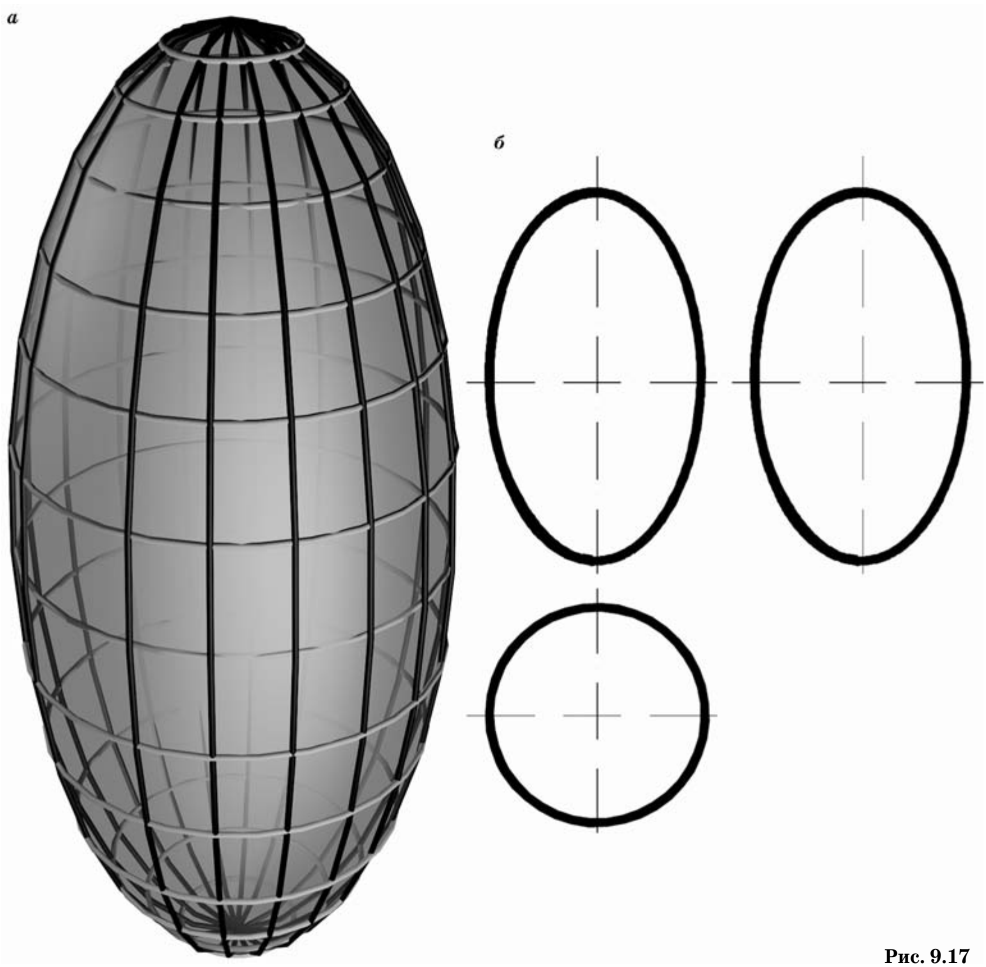


Рис. 9.17

Любая плоскость пересекает эллипсоид по эллипсу (в частном случае — по окружности).

Винтовые поверхности (рис. 9.18) образуются путем винтового перемещения образующей. Винтовая поверхность имеет уравнение

$$z = f(\sqrt{x^2 + y^2}) + p\,\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x},$$

где p — винтовой параметр.

Винтовая линия постоянного шага, образованная на поверхности прямого кругового цилиндра, называется гелисой. Поэтому линейчатые винтовые поверхности, у которых направляющей является гелиса, называются геликоидами. Геликоиды называют прямыми, если угол наклона образующей к оси геликоида прямой. В противном случае геликоиды называются косыми.

У косого геликоида образующая, перемещаясь по направляющим, остается параллельной образующим конической поверхности (рис. 9.19*а*). Тогда говорят о поверхности параллелизма. Форма прямого геликоида используется при создании винтовых лестниц, шнеков, а также в прямоугольных резьбах, предназначенных для передачи значительных осевых усилий.

Косые геликоиды (рис. 9.19*б*) ограничивают поверхность витков резьбы с прямолинейной боковой стороной профиля.

Выделение этих поверхностей показывает на особое значение их в технике, архитектурно-строительной практике и, особенно, в машиностроении.

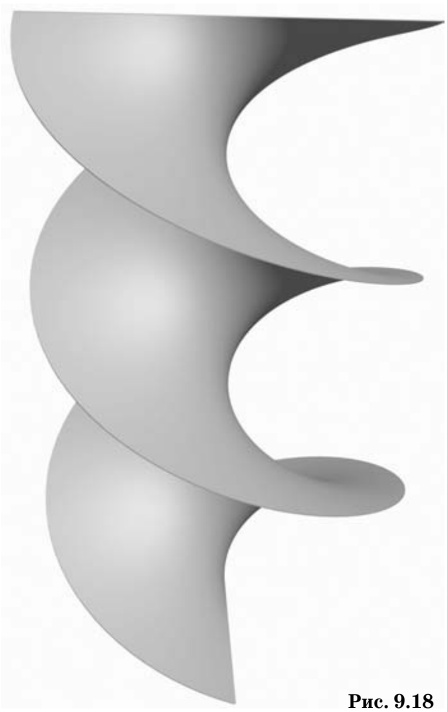


Рис. 9.18

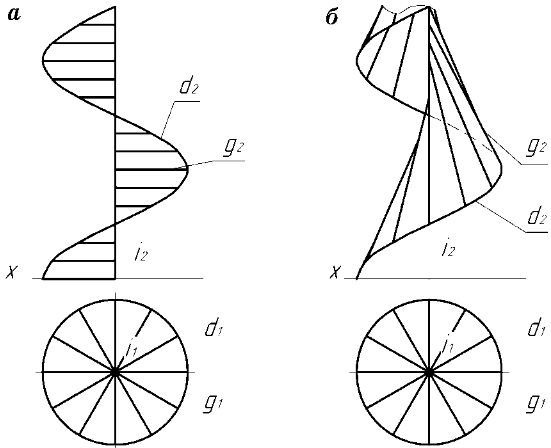


Рис. 9.19

9.3. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ С ПЛОСКОСТЬЮ ЧАСТНОГО ПОЛОЖЕНИЯ

Так как все точки тела вращения описывают при своем движении окружности, то линия пересечения с плоскостью тел вращения будет окружностью. Если плоскость пересекает тело не перпендикулярно, то в зависимости от поверхности и расположения плоскости получаются различные линии. При построении линии пересечения первоначально определяют экстремальные (или опорные) точки (самая левая, правая, нижняя, верхняя, ближняя, дальняя точки), принадлежащие линии пересечения.

9.3.1. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ЦИЛИНДРА ПЛОСКОСТЬЮ, НЕ ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОЙ ЕГО ОСИ

На рисунке 9.20 показаны различные случаи положения плоскости сечения относительно оси вращения цилиндра.

В случае, когда **плоскость параллельна оси цилиндра**, получим либо две параллельные прямые (рис. 9.20*а*), либо одну прямую (рис. 9.20*б*), совпадающую с образующей (касательная плоскость).

На рисунке 9.21*а* показан комплексный чертеж линии пересечения цилиндра с плоскостью, параллельной оси вращения. В данном случае на фронтальной проекции линии пересечения конкурируют друг с другом, а на профильной плоскости проекций эти линии будут видимыми. Если бы секущая плоскость прошла правее оси цилиндра, то тогда эти линии были бы невидимыми.

При пересечении **цилиндра с плоскостью, не параллельной и не перпендикулярной оси**, получим эллипс (рис. 9.20*в*), малая ось которого равна диаметру цилиндра, а большая — $d / \sin\alpha$. На рисунке 9.21*б* эллипс принадлежит фронтально проецирующей плоскости, а значит, его большая ось будет проецироваться в виде отрезка прямой линии.

Для случая, показанного на рисунке 9.21*б*, горизонтальная проекция линии пересечения — окружность, фронтальная — отрезок, соответствующий

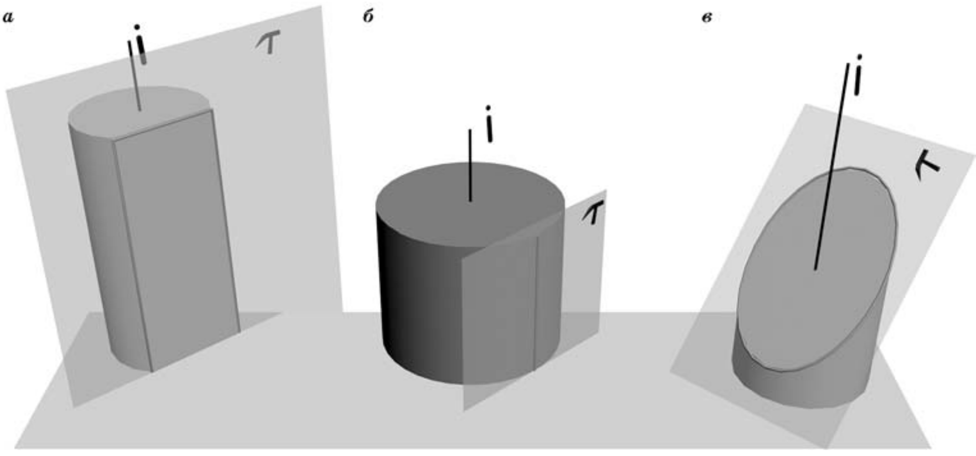


Рис. 9.20

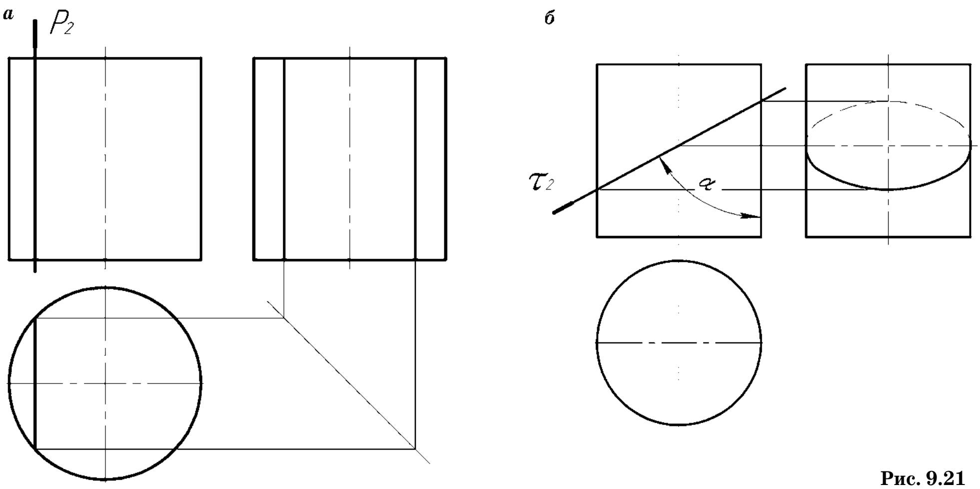


Рис. 9.21

натуральной длине большой оси эллипса, малая ось равна диаметру цилиндра. На профильной плоскости проекций линия пересечения с плоскостью выглядит в виде эллипса, одна из осей которого d, а другая — $d\,\mathrm{ctg}\alpha$, где d — диаметр цилиндра, угол α — угол наклона плоскости к оси цилиндра (рис. 9.21*б*), большая ось — диаметр цилиндра.

Часть эллипса, находящаяся на фронтальной проекции правее оси цилиндра, будет невидима на профильной проекции, так как направление взгляда на профильную плоскость проекций будет слева направо.

9.3.2. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ КОНУСА ПЛОСКОСТЬЮ

Если плоскость перпендикулярна оси вращения, то линией пересечения будет окружность с диаметром, равным (рис. 9.22)

$$d = 2h\ \mathrm{tg}\alpha/2.$$

Пересечение конуса с плоскостью, не перпендикулярной оси вращения, дает несколько вариантов линий:

1. Точка — плоскость проходит через вершину конуса (рис. 9.23).
2. Прямая — плоскость касается поверхности конуса (рис. 9.24).
3. Две пересекающиеся прямые — плоскость проходит через вершину конуса, а угол наклона плоскости по отношению к оси вращения меньше угла наклона образующей конуса к его оси (рис. 9.25).
4. Гипербола — плоскость пересекает верхнюю и нижнюю ветви конической поверхности (рис. 9.26). Плоскость параллельна оси конуса (рис. 9.26*а*) или угол ее наклона меньше угла наклона образующей конуса к его оси, но при этом плоскость не проходит через вершину конуса (рис. 9.26*б*).
5. Парабола — плоскость не проходит через вершину конуса и параллельна образующей (рис. 9.27).
6. Эллипс — плоскость пересекает только одну из ветвей конической поверхности (рис. 9.28).

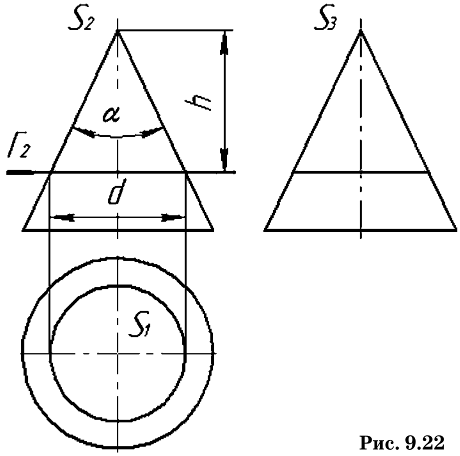


Рис. 9.22

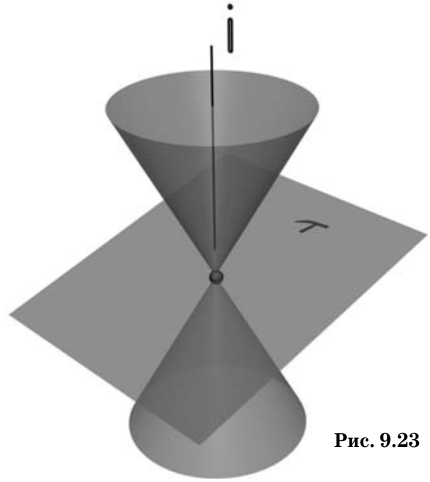


Рис. 9.23

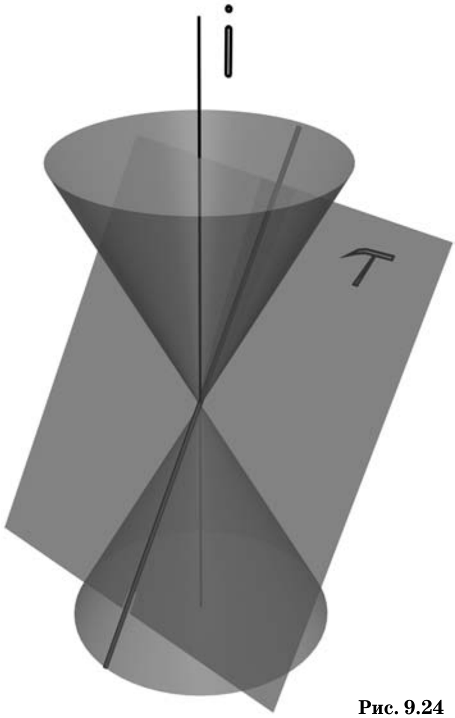


Рис. 9.24

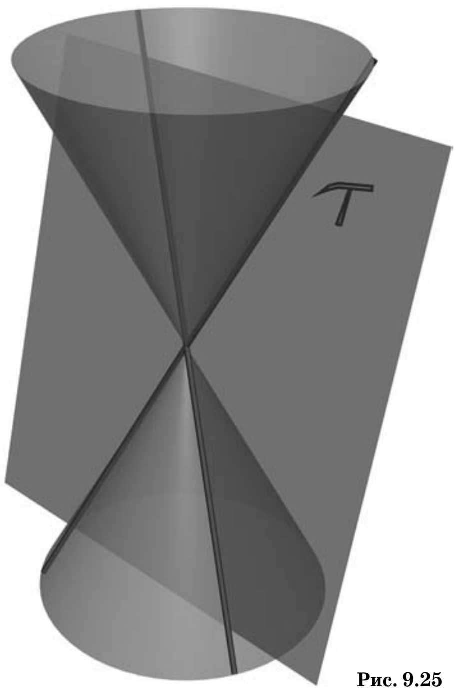


Рис. 9.25

На рисунке 9.29 показано построение проекций сечения для случая, когда **угол между секущей плоскостью и осью конической поверхности больше угла наклона образующей конической поверхности к его оси**, поэтому в сечении получим замкнутую линию — эллипс. Определим проекции его осей. Большая ось эллипса на Π_2 проецируется в натуральную величину. Ее проекции определяют высшей точкой — D_2 и низшей — C_2. Ее горизонтальную проекцию определяем по линиям связи, профильные проекции — по правилу построения третьей проекции точки по двум известным.

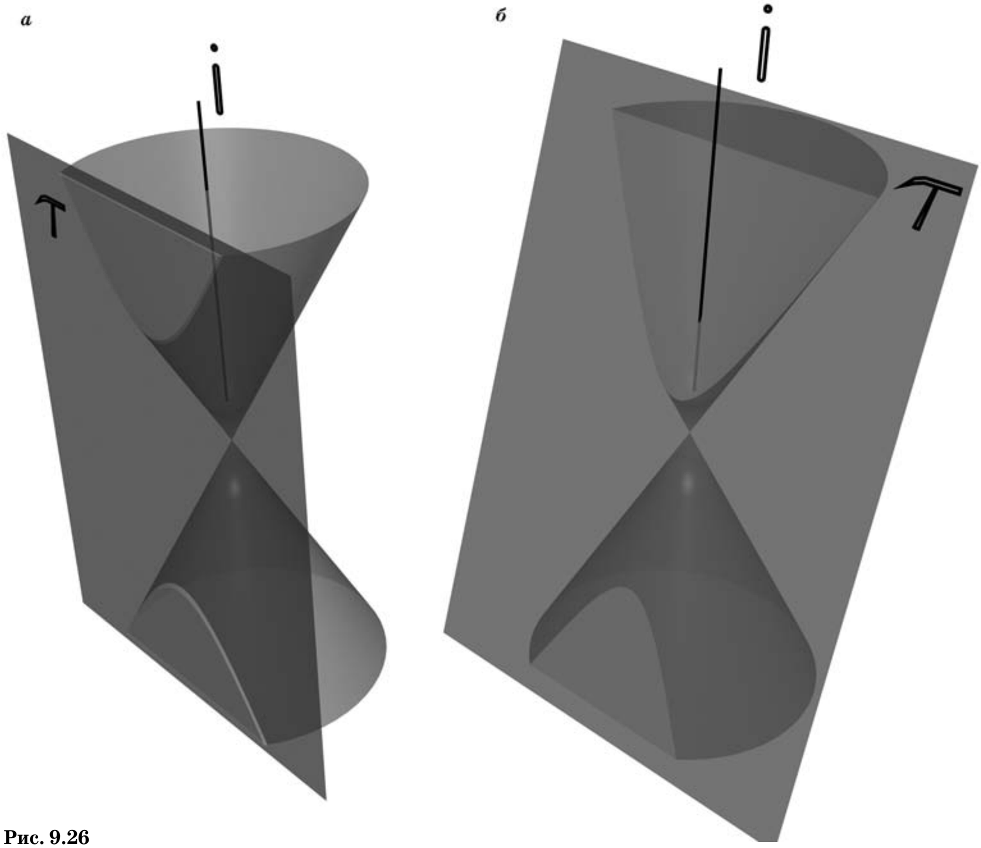


Рис. 9.26

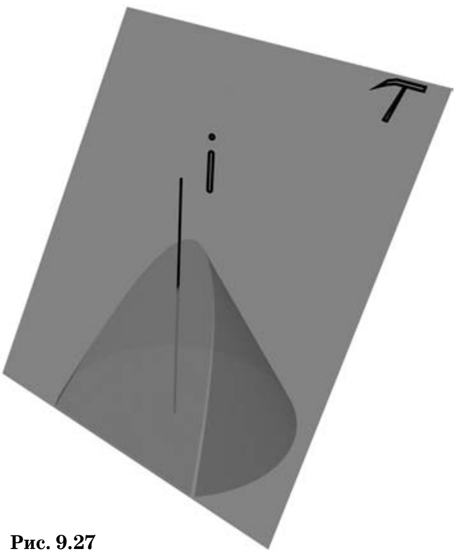


Рис. 9.27

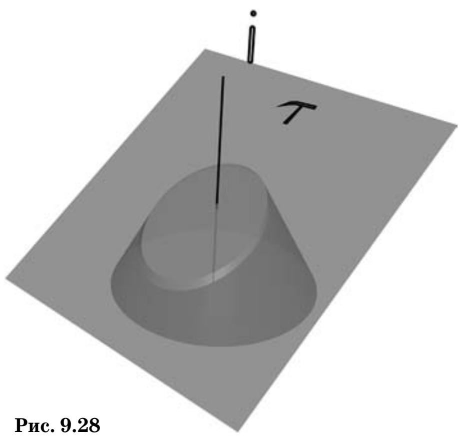


Рис. 9.28

Малая ось эллипса на Π_2 проецируется в точку, расположенную на середине отрезка между высшей и низшей точками. Через середину эллипса (точки $A_2 \equiv B_2$) проводим горизонтальную плоскость уровня Γ перпендикулярно оси конусной поверхности. Так как точки вращаются вокруг оси, то их траектории — это окружности (параллели) и линия пересечения плоскости, перпендикулярной оси вращения любого тела, также будет окружностью, которую показываем на Π_1 (тонкая линия с центром, совпадающим с проекцией оси конуса). Проводим линию связи для точек проекций центра эллипса O_1 — O_2 и O_2 — O_3 и определяем горизонтальную проекцию малой оси (точки A_1 и B_1 — пересечение линии связи со вспомогательной окружностью, лежащей в плоскости Γ).

Секущая плоскость имеет угол наклона, одинаковый с углом наклона образующей к этой оси (рис. 9.30). В сечении получится парабола, вершина которой будет наивысшей точкой на поверхности. Находим горизонтальную проекцию линии пересечения плоскости Σ с основанием конуса. Определяем проекции экстремальных точек: по фронтальной проекции самую верхнюю (1) и нижние (2 и 3), самую правую (1) и левые (2 и 3) проекции точки. На практике для определения проекций параболы, как и для других лекальных кривых линий, требуется определение ряда промежуточных точек, от количества которых зависит точность построения линии.

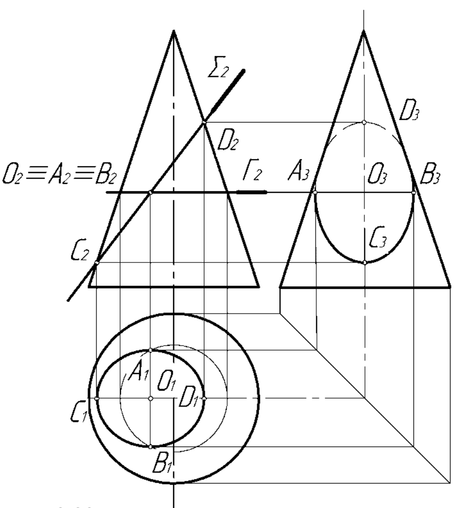


Рис. 9.29

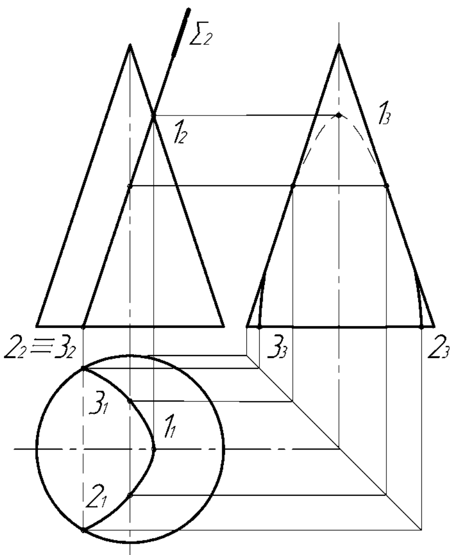


Рис. 9.30

Угол наклона секущей плоскости к оси конической поверхности γ меньше угла наклона образующей конической поверхности (рис. 9.31). Плоскость Σ пересечет поверхность конуса по *гиперболе*, одна (нижняя) ветвь которой показана на чертеже (рис. 9.31).

Секущая плоскость параллельна оси конуса (рис. 9.32). Плоскость P пересечет конус по ветви *гиперболы*, аналогично предыдущему случаю.

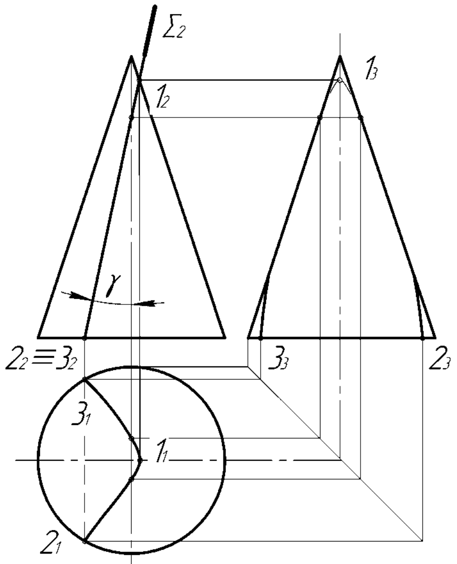


Рис. 9.31

Секущая плоскость проходит через вершину конуса — получаем отрезки прямых линий (рис. 9.33).

Линия пересечения поверхности вращения с плоскостью общего вида (рис. 9.34) определяется по точкам пересечения параллелей поверхности вращения с плоскостью. Сначала определяют *главные* (*опорные*) *точки* линии пересечения, а затем ряд промежуточных ее точек. На рисунке 9.34*б* — комплексный чертеж. Главными точками линии пересечения показано наглядное изображение определения точек пересечения, а на поверхности вращения общими с плоскостью являются точки пересечения плоскостью главного меридиана, экватора, высшая и низшая точки (рис. 9.34*а*).

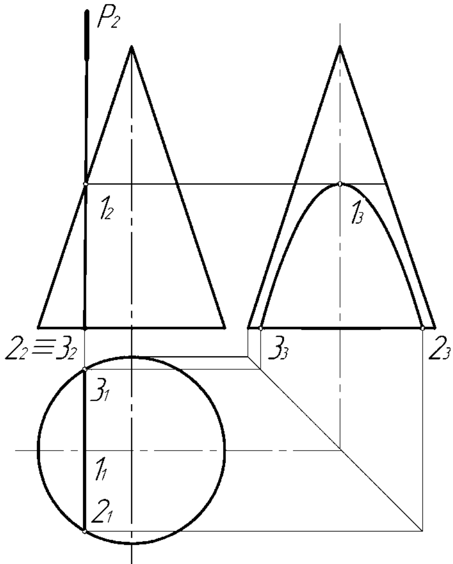


Рис. 9.32

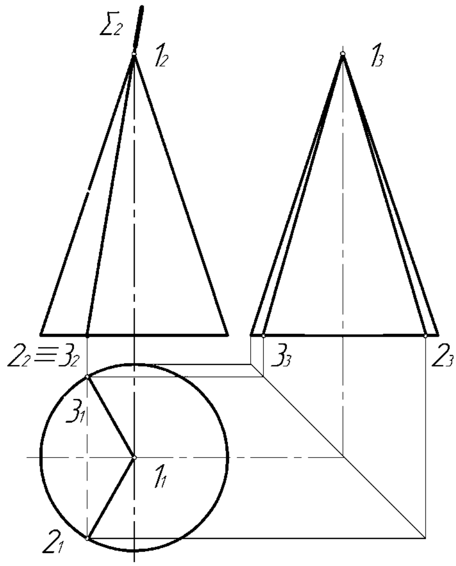
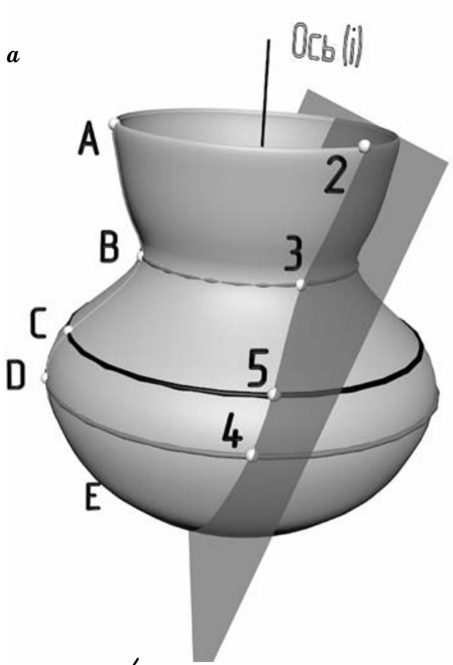


Рис. 9.33

Для поверхности на рисунке 9.34*б* низшая точка — 1, высшая точка — 2 (показано построение линии пересечения для ближней половины поверхности, причем следует иметь в виду, что вторая половина — зеркальное отображение первой). Точка 3 принадлежит горлу, 4 — экватору, а точка 5 — промежуточной параллели *C*. Данная параллель будет находиться на плоскости-посреднике, проведенной перпендикулярно оси вращения. Точка 6 определяет видимость линии пересечения на профильной проекции, так как принадлежит главному меридиану.

а


Ось (i)
A
2
B
3
C
5
D
4
E

б

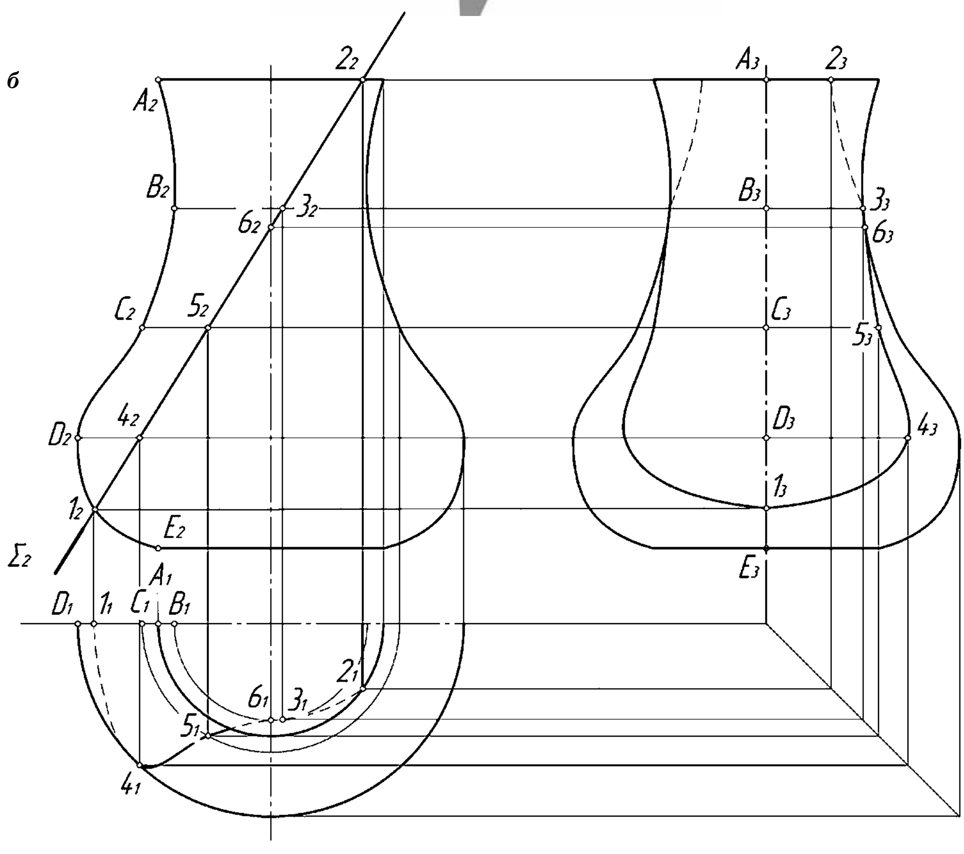

2_2
A_2
B_2
6_2
3_2
C_2
5_2
D_2
4_2
1_2
E_2
Σ_2
A_1
D_1
1_1
C_1
B_1
2_1
6_1
3_1
5_1
4_1
A_3
2_3
B_3
3_3
6_3
C_3
5_3
D_3
4_3
1_3
E_3

Рис. 9.34

9.4. ЛИНИИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ ПЛОСКОСТЬЮ ОБЩЕГО ПОЛОЖЕНИЯ

При определении линии пересечения поверхности вращения плоскостью общего положения в качестве поверхностей-посредников используют проецирующие плоскости, перпендикулярные оси вращения. В этом случае линия пересечения проецирующей плоскости с поверхностью вращения дает окружность, а ее пересечение с плоскостью общего положения — прямую линию. Общие точки этих линий будут принадлежать как поверхности, так и плоскости общего положения и будут являться точками, принадлежащими линии пересечения плоскости общего положения с поверхностью. Однако данный способ можно назвать приближенным и трудоемким, так как он требует большого количества плоскостей-посредников для определения промежуточных точек линии пересечения.

Для упрощения решения задачи целесообразно применять преобразование комплексного чертежа. На рисунке 9.35 показан пример определе-

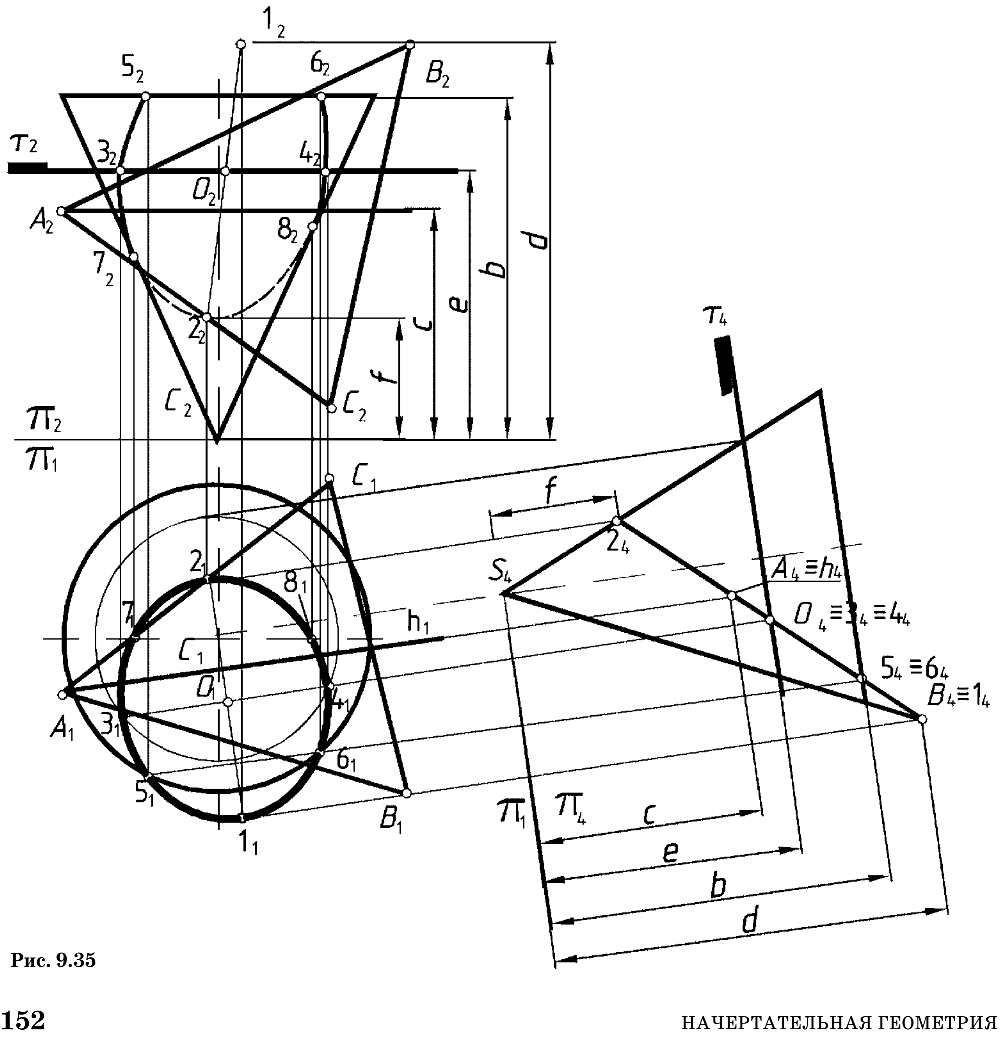


Рис. 9.35

ния линии пересечения поверхности вращения с плоскостью общего положения. Для определения опорных точек (нижней и верхней) преобразуем чертеж таким образом, чтобы по отношению к дополнительной плоскости проекций π_4 плоскость общего положения ΔABC заняла проецирующее положение. Для этого новую базу отсчета проведем перпендикулярно горизонтали h (на чертеже перпендикулярно h_1). По найденной проекции определяем форму кривой пересечения — эллипс (см. рис. 9.29) и опорные точки — 1 и 2. Центр эллипса O_4 определим на середине отрезка $1_4 2_4$. Горизонтальная проекция центра находится на линии связи O_4–O_1 и линии, перпендикулярной данной линии. На этой линии по линиям связи находим проекции точек 1_1 и 2_1 — большой оси эллипса. Для определения горизонтальной проекции малой оси эллипса $3_1 4_1$ достаточно из вспомогательной проекции середины O_4 проекции большой оси $3_4 4_4$ эллипса провести перпендикулярную линию к горизонтальной проекции диаметра большой оси и найти общие точки линии пересечения плоскости τ.

Видимость линии пересечения определяем, считая треугольник ABC прозрачным, а коническую поверхность — нет. На горизонтальной плоскости видна проекция отрезка на основании конуса — $5_1 6_1$, а вся часть проекции эллипса не будет видна, так как основание конуса расположено выше. На фронтальной проекции точки перехода видимой части к невидимой — это 7_2 и 8_2 (на образующих очерка). Они определяются по горизонтальной проекции эллипса на пересечении с проекциями этих образующих (точки 7_1 и 8_1). Так как точки 5 и 6 ближе точек 7 и 8, то на фронтальной проекции будут видны проекции этих линий — $5_2 7_2$ и $6_2 8_2$.

Таким образом, определение линии пересечения тела вращения методом замены плоскостей проекций удобно для тех случаев, когда поверхность имеет частные случаи линий пересечения, для построения которых необходимо определить несколько опорных точек.

В общем случае необходимо воспользоваться геометрическими телами-посредниками, которые будут пересекать поверхность по меридианам или параллелям. В первом случае общей линией будут образующие поверхности вращения, во втором — окружности.

9.5. ЛИНИЯ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ С МНОГОГРАННИКОМ ИЛИ ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ С ВЫРЕЗОМ

В данном случае отдельно определяем линию пересечения для каждой секущей плоскости (считая их бесконечными). Затем находим общую линию для пары плоскостей (линия пересечения плоскостей).

На рисунке 9.36 показано построение горизонтальной и профильной проекций конической поверхности с вырезом, выполненном двумя пересекающимися плоскостями, которые можно представить как часть многогранника. Определяем проекции линии пересечения двух проецирующих плоскостей, которые будут являться эллипсами. Выделяем проекции линий, принадлежащих конусу. Показываем линии пересечения двух пло-

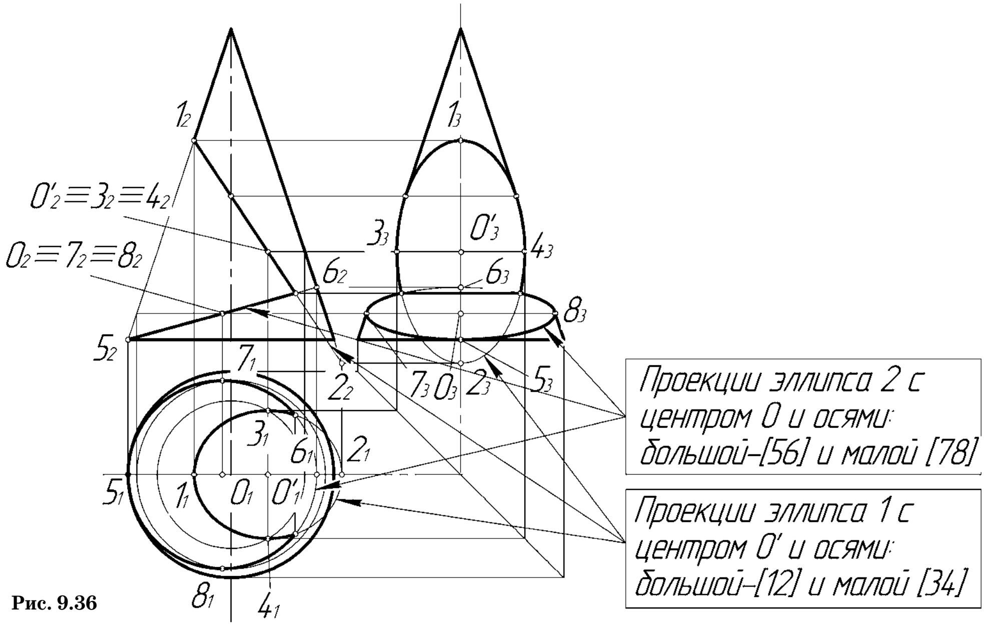


Рис. 9.36

скостей (на горизонтальной проекции показана невидимая линия, на фронтальной — точка, на профильной — отрезок видимой линии).

Линии пересечения тела вращения с многогранником определяют аналогично примеру, рассмотренному на рисунке 9.35. Для граней многогранника необходимо построить линии пересечения с поверхностью вращения.

9.6. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПРЯМОЙ ЛИНИИ С ПОВЕРХНОСТЬЮ ВРАЩЕНИЯ

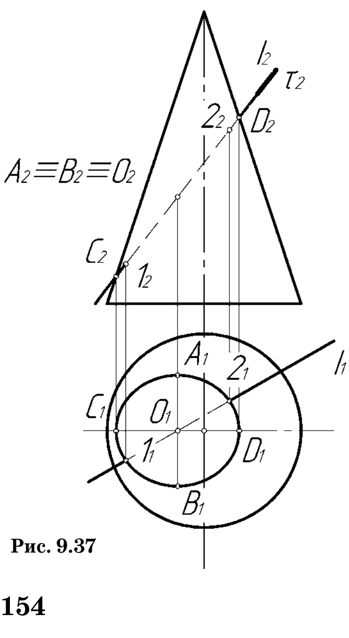


Рис. 9.37

Алгоритм определения точек пересечения прямой с поверхностью вращения аналогичен алгоритму определения точек пересечения прямой с многогранником. На рисунке 9.37 приведен пример определения точек пересечения прямой с конической поверхностью. Через прямую l проводим фронтально проецирующую плоскость (на чертеже τ) и определяем линию пересечения этой плоскости с конусом (рис. 9.37). По горизонтальной проекции определяем общие точки прямой l и линии пересечения проецирующей плоскости с конусом. Фронтальные проекции точек пересечения определяем по линиям связи.

Пример 32

Задание: на конической поверхности определить недостающие проекции точек A, B, C, D, E, F и G двумя способами (рис. 9.38*а*).

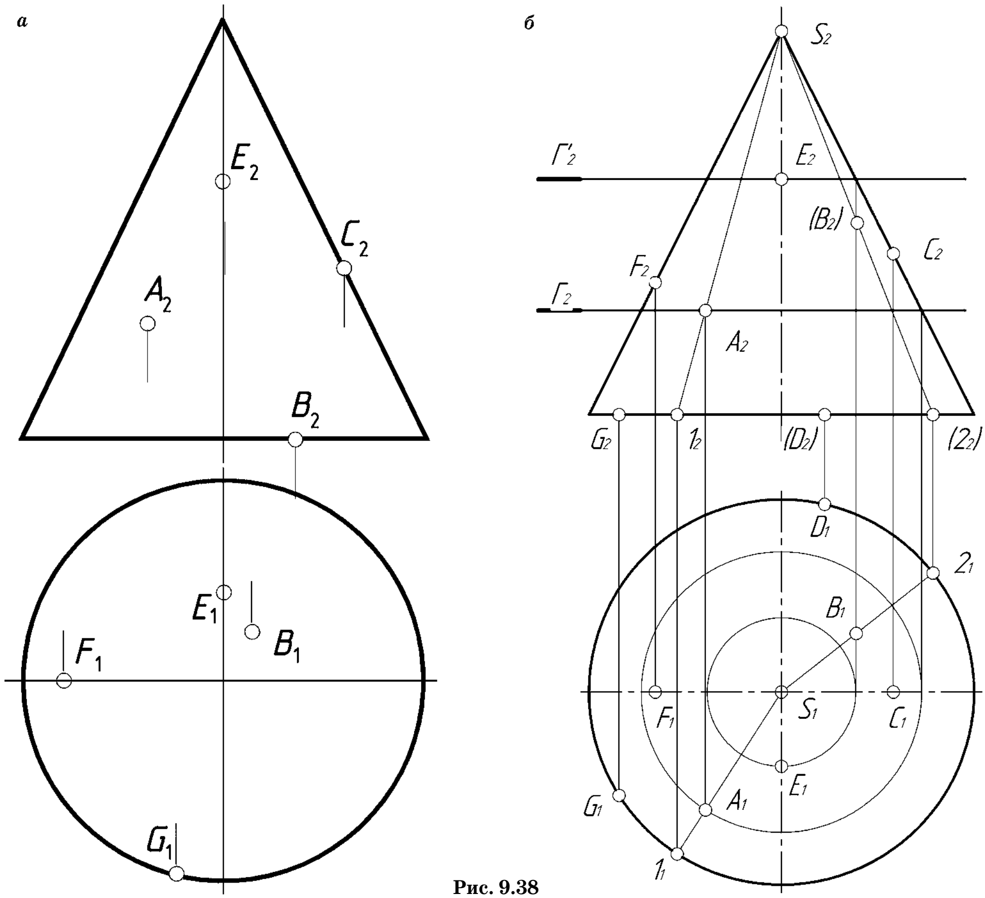


Рис. 9.38

Решение. Первый способ: проводим горизонтальные плоскости уровня, перпендикулярные оси вращения, через проекции точек A, E. Линиями пересечения конуса с этими плоскостями будут окружности, проекции которых показываем на горизонтальной плоскости проекций. Точки пересечения окружностей и линий связи будут горизонтальными проекциями точек A и E (рис. 9.38*б*).

Так как точка D принадлежит основанию конуса, то ее горизонтальную проекцию определим по линии связи на горизонтальной проекции основания конуса.

Фронтальная проекция точки C расположена на правой образующей, а горизонтальная — на диаметре, параллельном оси x.

Второй способ: проводим прямую (образующую), проходящую через вершину конуса и проекцию точки, до пересечения с проекцией основания конуса. Находим вторую проекцию данной образующей (линия пересечения поверхности плоскостью, проходящей через вершину поверхности вращения) и по линиям связи определяем недостающие проекции точек.

Решение задачи выполнено с учетом видимости проекций точек.

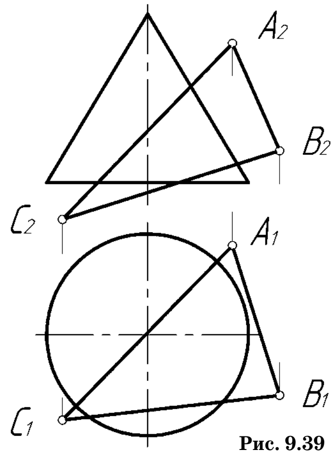


Рис. 9.39

Пример 33

Задание: построить проекции линии сечения конической поверхности плоскостью общего положения $\Sigma(\Delta ABC)$ (рис. 9.39).

Решение: чтобы упростить решение задачи, осуществим замену плоскости Π_2 плоскостью Π_4, перпендикулярной к Π_1 (рис. 9.40). Дополнительную плоскость проекций выбираем таким образом, чтобы по отношению к ней секущая плоскость Σ заняла проецирующее положение. Спроецируем на плоскость Π_4 коническую поверхность и плоскость $\Sigma(\Delta ABC)$. Выполненные преобразования позволили свести решение задачи к случаю, рассмотренному ранее. Линией пересечения конуса и плоскости является эллипс, большая ось которого — 12 (на плоскости проекции Π_4 — $1_4 2_4$). Определяем проекцию оси эллипса на горизонтальную плоскость проекций — $1_1 2_1$. Эллипс является лекальной кривой линией, горизонтальную проекцию которой вычерчиваем по проекциям принадлежащих ей точек.

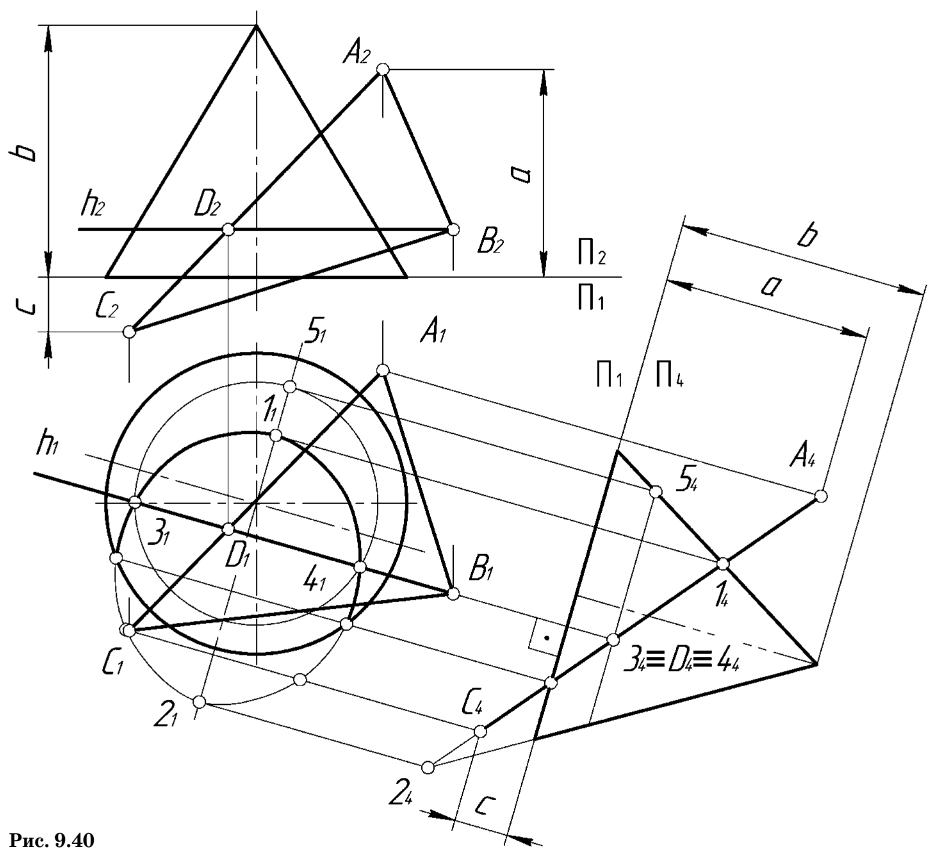


Рис. 9.40

Используя проекции на плоскость Π_1, определяем фронтальную проекцию линии пересечения (рис. 9.41). Для построения фронтальной проекции сечения определяем опорные точки: 5 и 6 — нижние точки, лежащие на основании конуса; 1 и 2 — крайние точки большой оси эллипса (точка 1 принадлежит действительной линии сечения, точка 2 — отсеченной плоскостью основания конуса части эллипса); 3 и 4 — крайние точки малой оси эллипса. Кроме этих точек, определяем точки границы видимости фронтальной проекции линии 7 и 8, которые расположены на образующих конуса.

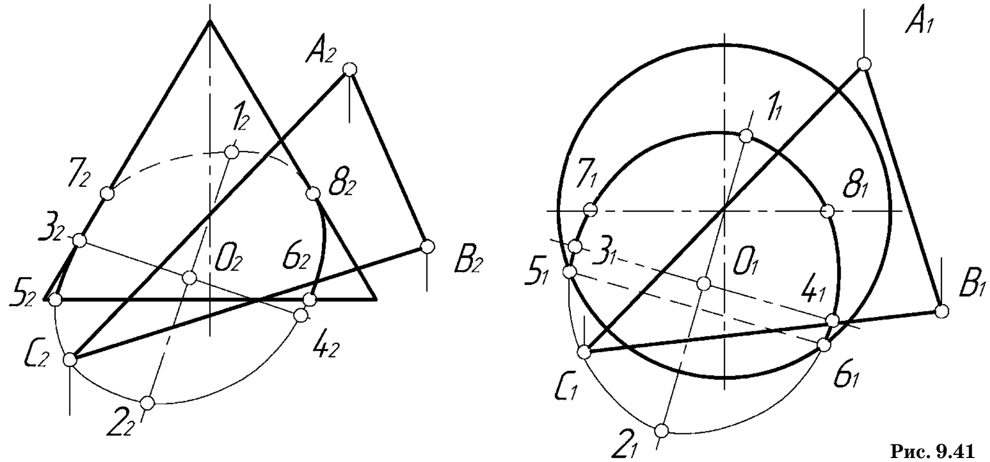


Рис. 9.41

Пример 34

Задание: построить горизонтальную и профильную проекции поверхности вращения с призматическим отверстием (рис. 9.42).

Решение: для наклонных граней отверстия строим гиперболу, оставляя те части ее, которые ограничены отрезками фронтально проецирующих прямых (рис. 9.43).

Для горизонтальной плоскости уровня получаем окружность.

Строим профильную проекцию.

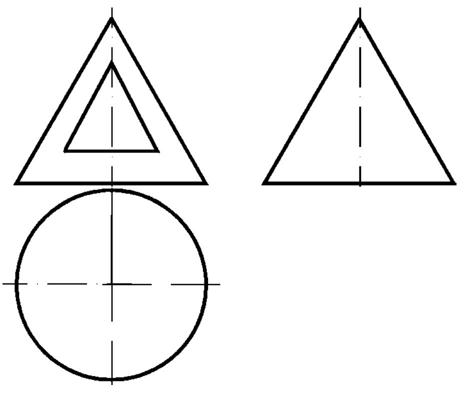


Рис. 9.42

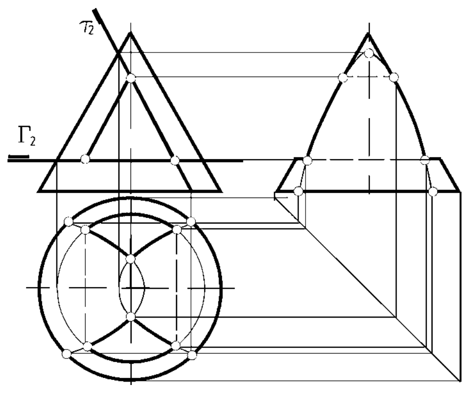


Рис. 9.43

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Перечислить и показать возможные случаи пересечения конической поверхности и плоскости.
2. Что такое меридиан и параллель? Показать на примере.
3. Что такое опорные (экстремальные) точки?
4. Как определить точки пересечения прямой линии с поверхностью?
5. Какие параллели называют экватором и горлом?
6. Какой меридиан называют главным?
7. Назвать разновидности тора.
8. Какая часть поверхности вращения называется основанием?
9. В чем особенности комплексного чертежа сферы?
10. В чем принципиальное отличие однополостного и двухполостного гиперболоида?

10 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЛИНИИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВРАЩЕНИЯ

Линии пересечения поверхностей тел вращения определяются при помощи поверхностей-посредников, которые пересекают исследуемые тела по наиболее простым (с точки зрения построения) линиям. Точки пересечения этих линий будут общими для пересекающихся тел и посредника, а значит, будут принадлежать искомой линии пересечения поверхностей. Рассмотрим применение плоскости и сферы в качестве поверхностей-посредников.

10.1. СПОСОБ ПЛОСКОСТЕЙ-ПОСРЕДНИКОВ

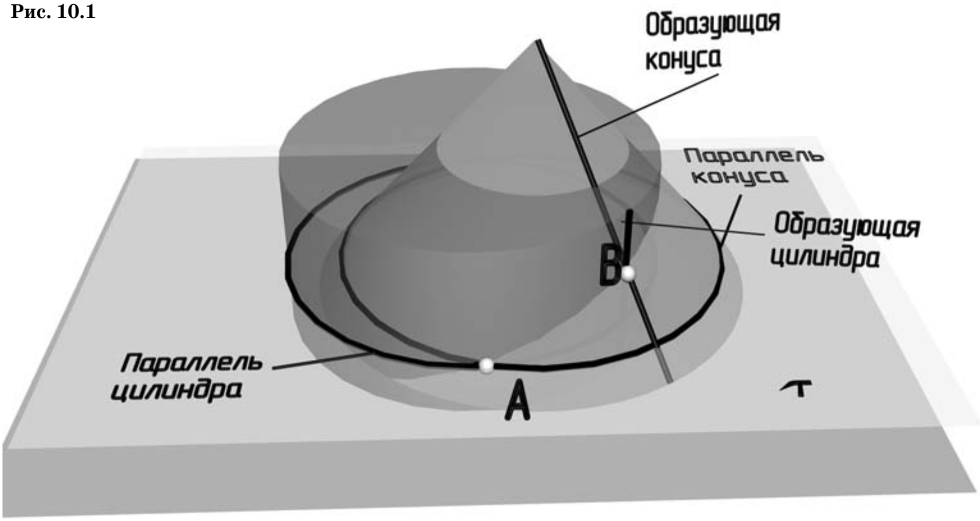
В качестве посредников выбирают проецирующие плоскости, образующие с каждой из поверхностей линии пересечения в виде окружностей (перпендикулярно оси вращения) или прямых линий (параллельно оси вращения для цилиндра или пересекающие вершину конуса). Показываем на чертеже линии пересечения плоскости с каждой из поверхностей и находим общие точки этих линий, которые будут принадлежать линии пересечения поверхностей. Таким образом, данный способ можно применять для тел, которые имеют параллельные, пересекающиеся или скрещивающиеся под углом 90° (пересечение цилиндра и тора) оси вращения.

На рисунке 10.1 показано пересечение конуса и цилиндра. Для определения точки A, принадлежащей линии пересечения поверхностей, показана плоскость-посредник τ, которая пересечет цилиндр и конус по окружностям (параллелям). Общей точкой для этих линий и будет точка, принадлежащая линии пересечения конуса и цилиндра.

На рисунке 10.1 показано определение точки B при помощи посредников-линий (образующих конуса и цилиндра).

На рисунке 10.2 приведено практическое решение рассмотренной выше задачи — определение линии пересечения

Рис. 10.1



цилиндрической и конической поверхностей. Две поверхности имеют параллельные оси вращения. Пересечение поверхностей имеет две линии.

Первая — пересечение цилиндра и конуса по верхней плоскости основания цилиндра. Так как эта плоскость располагается перпендикулярно осям вращения, то линией пересечения цилиндра и конуса будет окружность диаметром DK.

Вторая линия расположена ниже первой. Ее горизонтальная проекция совпадает с частью проекции горизонтального очерка основания цилиндра (окружность). Найдем опорные точки: нижние точки C и A определяются по горизонтальной проекции как точки пересечения очерков оснований цилиндра и конуса. Высшая точка F этой линии будет располагаться на меридиане, который находится в горизонтально проецирующей плоскости, проходящей через проекции осей цилиндра и конуса и параллели a.

Самая правая точка линии пересечения E будет точкой пересечения правой образующей цилиндра и меридиана [$1S$]. Сначала определяем горизонтальную проекцию E_1, а затем по линии связи — E_2.

Проекции точек B и L определим при помощи горизонтально проецирующей плоскости τ_1, которая пересечет конус по меридианам [$2S$] и [$3S$]. Пересечение их горизонтальных проекций с горизонтальной проекцией цилиндра позволит найти горизонтальные проекции B_1 и L_1. Фронтальные проекции этих точек определим на пересечении линий связи и проекций меридианов [2_2S_2] и [3_2S_2].

При помощи фронтально проецирующей плоскости Γ_2 определяем проекции точки I, горизонтальная проекция которой есть точка пересечения горизонтальной проекции параллели b и горизонтальной проекции цилиндра.

Проекции точек G и H определим по горизонтальным проекциям, как пересечение проекций главных меридианов конуса (правый и левый меридиан на горизонтальной плоскости проекций проецируются в виде диаметра, параллельного плоскости проекций Π_2).

Таким образом, на рассмотренном примере показано расположение поверхностей-посредников — проецирующих плоскостей, расположенных:

а) $Г_2$ — перпендикулярно оси вращения, что дает как для конуса, так и для цилиндра линию пересечения в виде окружностей — параллелей;

б) $Г_1$ — параллельно оси вращения, что дает при пересечении конуса пересекающиеся прямые, а цилиндра — параллельные прямые.

Такая возможность возникает потому, что простейшие линии с точки зрения простоты их построения для цилиндра и конуса будут при пересечении их плоскостями, параллельной и перпендикулярной осям вращения.

Таким образом, задачу можно решить тремя способами: при помощи фронтально, горизонтально проецирующих плоскостей-посредников и меридиана-посредника конуса.

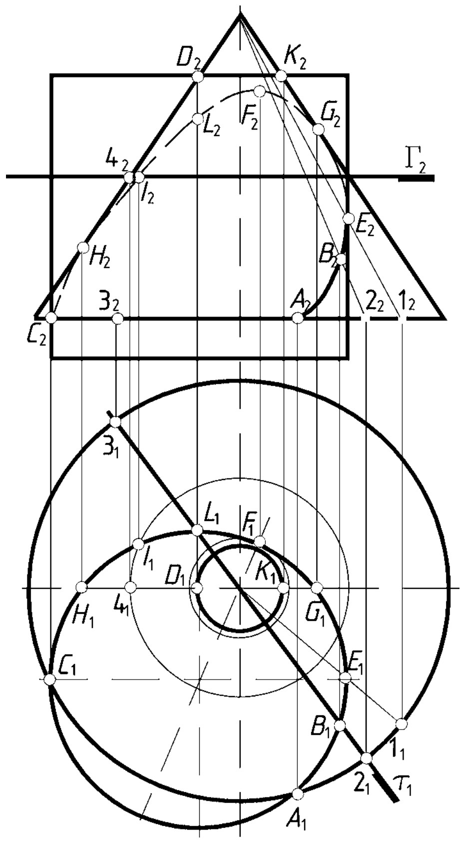


Рис. 10.2

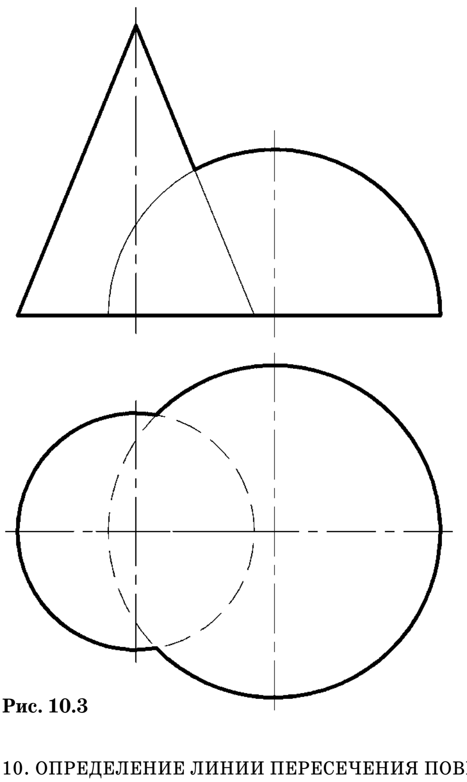


Рис. 10.3

Пример 35

Задание: построить линию пересечения конуса и полусферы (рис. 10.3).

Решение: для *определения линии пересечения* поверхностей используют вспомогательные секущие поверхности. Поверхности-посредники пересекают данные поверхности по простым (с точки зрения построения) линиям, которые, в свою очередь, пересекаются в точках, принадлежащих линии пересечения данных поверхностей. Для данной задачи в качестве поверхности-посредника выбираем **плоскость, так как оси вращения обоих тел параллельны,** и при пересечении их плоскостями, перпендикулярными к осям вращения, получаем плоскую линию — окружность. Общая точка окружностей полусферы и конуса будет принадлежать линии пересечения этих тел.

Показываем (рис. 10.4) опорные точки 1 и 2, а потом определяем промежуточные точки 3, 4 и 5 при помощи трех плоскостей-посредников. Для фронтально проецирующей плоскости, показанной при помощи штриховой линии, точка 4 будет общей для параллелей конуса и сферы.

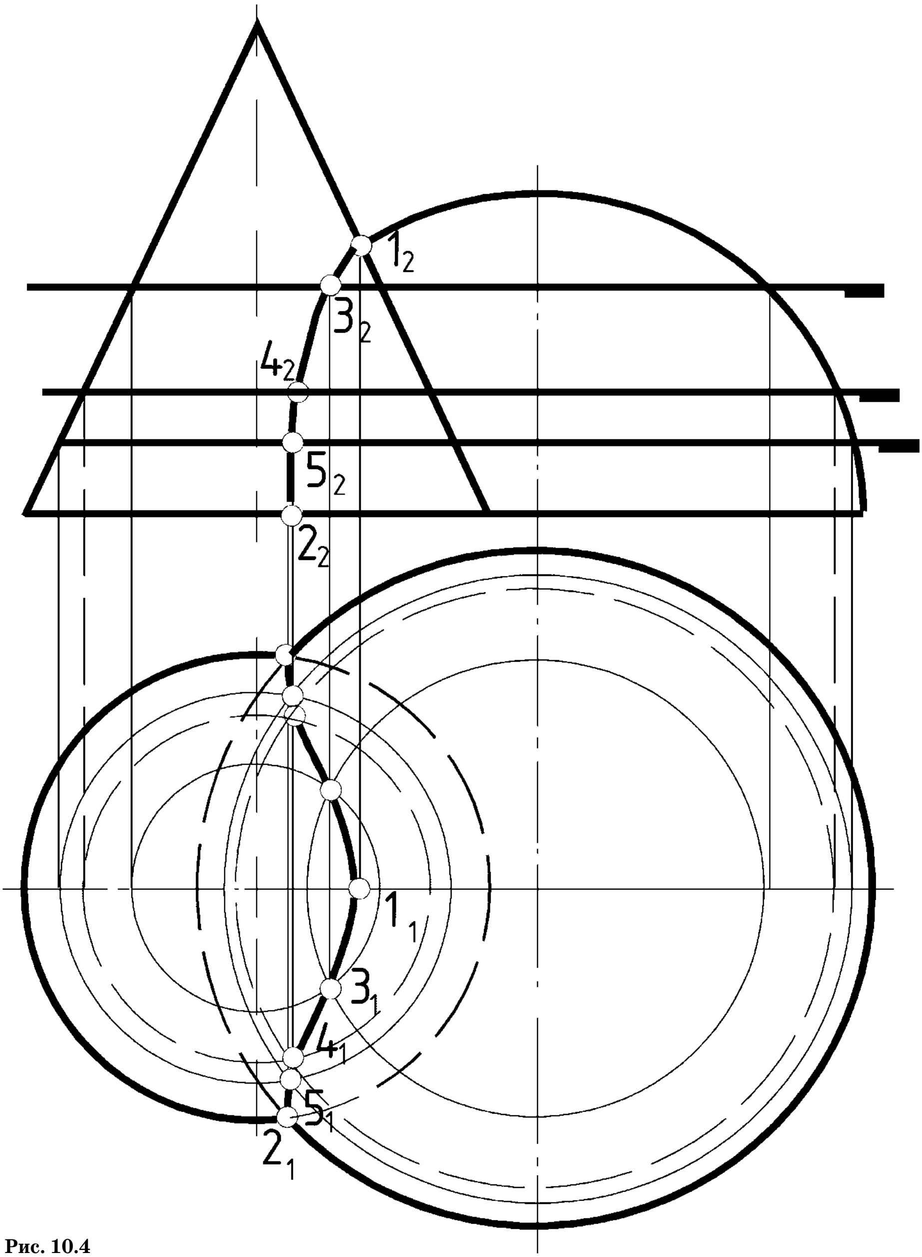


Рис. 10.4

На горизонтальной проекции пересечение этих параллелей (штриховые окружности) даст точку 4, принадлежащую линии пересечения конуса и полусферы. Фронтальную проекцию определяем по линии связи на проекции плоскости-посредника. Аналогичным образом получаем положение точек 3 и 5.

Положение дальней части линии пересечения на фронтальной проекции будет совпадать с проекцией ближней части линии пересечения, а на горизонтальной проекции дальняя часть (на чертеже она находится выше горизонтальной оси симметрии) будет зеркальным отображением ближней части линии пересечения.

10.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЛИНИИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ПРИ ПОМОЩИ СФЕР-ПОСРЕДНИКОВ

Способ определения линии пересечения при помощи сфер-посредников основан на том, что при пересечении поверхности вращения сферой, центр которой находится на оси вращения этой поверхности, линией их пересечения будет окружность. Данный способ можно применять, когда оси вращения поверхностей пересекаются (способ концентрических сфер) или когда пересекающиеся поверхности имеют общую плоскость симметрии (способ эксцентрических сфер).

10.2.1. СПОСОБ КОНЦЕНТРИЧЕСКИХ СФЕР

При совпадении осей вращения двух поверхностей результатом их пересечения будет окружность, так как все точки обеих поверхностей вращаются вокруг одной и той же оси вращения.

Способ концентрических сфер применяется в случае пересекающихся осей вращения поверхностей. Тогда, помещая центр сферы-посредника в точку пересечения осей, получаем на каждой из поверхностей линию пересечения со сферой как плоскую фигуру (окружность), так как сфера имеет бесконечное количество осей вращения, проходящих через ее центр.

На рисунке 10.5 показано пересечение конуса и цилиндра, оси вращения которых пересекаются.

Линию пересечения обоих тел определяем способом концентрических сфер, в основе которого лежит простота построения линии пересечения сферы с обоими телами. Сферу распо-

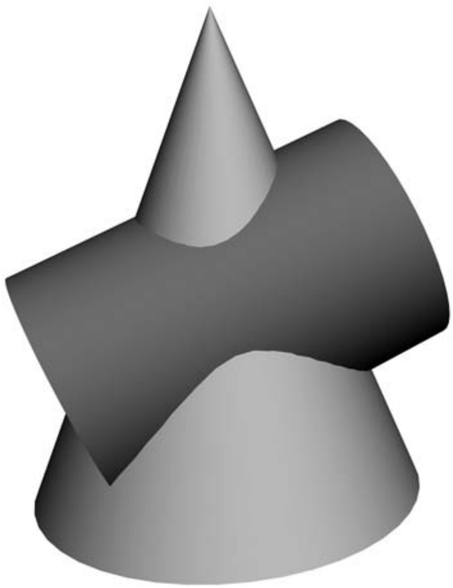


Рис. 10.5

лагаем таким образом, чтобы при пересечении с конусом она образовывала линию — окружность. Это возможно, если центр сферы расположим на оси вращения конуса. Тогда оси вращения конуса и сферы совпадут (у сферы бесчисленное количество осей вращения, пересекающихся в центре). Точно такое же условие должно быть удовлетворено и для второй поверхности (в данном случае — для цилиндра).

Таким образом, центр сферы-посредника должен лежать одновременно на осях вращения обоих тел. Этому условию удовлетворяет точка пересечения осей вращения заданных пересекающихся тел.

На рисунке 10.6 показана сфера, центр которой располагается в точке пересечения осей вращения конуса и цилиндра. Для большей наглядности показаны два варианта: рис. 10.6*а* — поверхности прозрачные; рис. 10.6*б* — поверхности непрозрачные.

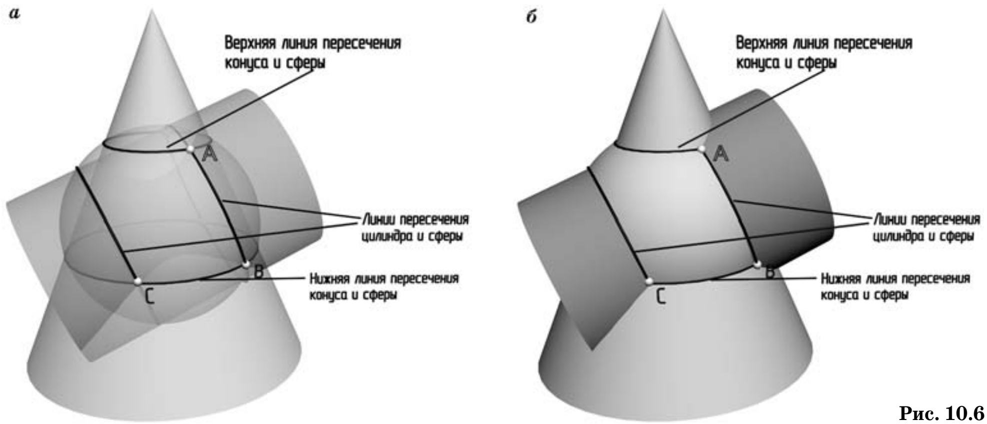


Рис. 10.6

На рисунке 10.7 показано определение линии пересечения цилиндра и конуса для фронтальной проекции, которая распадается на две кривые — AB и DC. Центр сфер-посредников — точка пересечения осей конуса и цилиндра — точка О.

Определим точки верхней кривой (рис. 10.7): точки A и B находим на пересечении главных меридианов (образующих) конуса и цилиндра. Точка A — наивысшая точка. Впишем в цилиндр сферу, касательную к его поверхности. На этой сфере находится низшая точка верхней линии пересечения и высшая точка на нижней линии пересечения. Пересечение указанной сферы конуса будет по окружностям 1–2 — сверху и 3–4 — на нижней части конуса. Эта же сфера коснется цилиндра по точкам 5–6. Пересечение проекций окружностей сферы и цилиндра дают фронтальные проекции точек E и G. Радиус следующей сферы выбран произвольно для нахождения проекций промежуточных точек. Сфера пересечет конус по окружностям 7–8 и 9–10, а цилиндр — 11–12 и 13–14. Это позволит определить проекции точек F, M и H.

Максимальная для решения задачи сфера касается основания конуса. С ее помощью определяем фронтальную проекцию точки N. Точка Dявля-

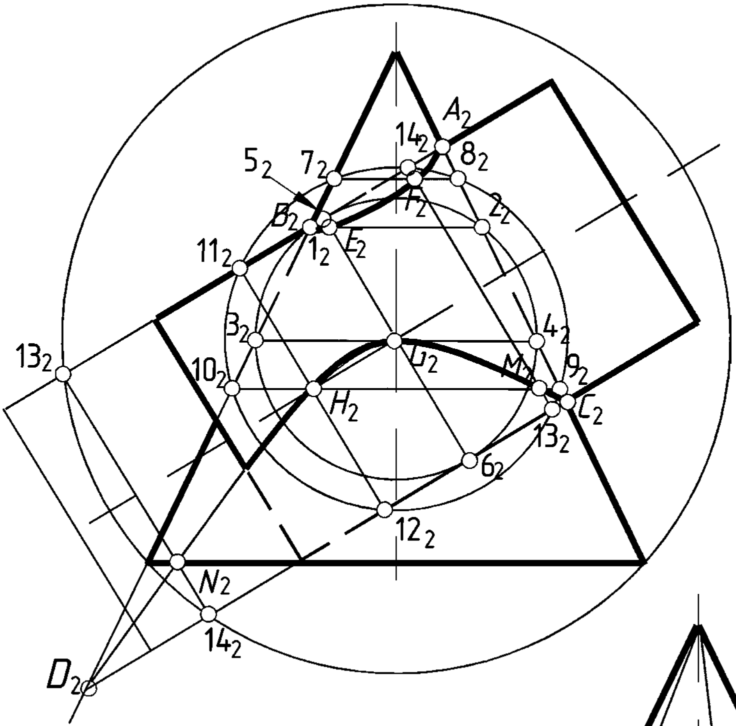


Рис. 10.7

ется самой низшей и находится на продолжении образующих цилиндра и конуса.

Соединяя плавными лекальными кривыми низшие и высшие проекции полученных точек, показываем фронтальные проекции верхней и нижней линий пересечения.

На рисунке 10.8 показано определение горизонтальных проекций линий пересечения. Эти проекции покажем на поверхности конуса. Причем верхнюю линию определяем при помощи меридианов. Нижнюю линию пересечения на горизонтальной плоскости проекций определим при помощи параллелей.

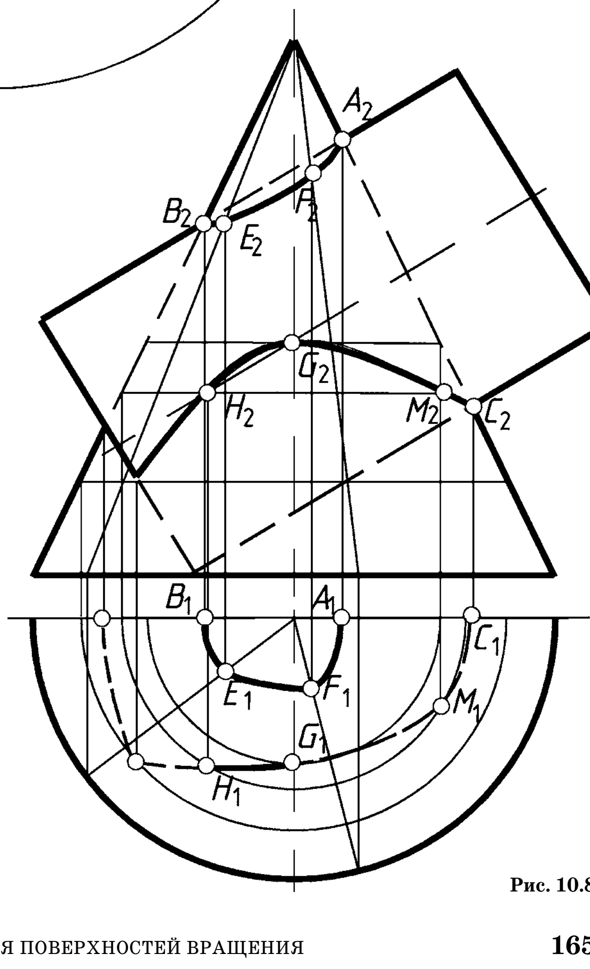


Рис. 10.8

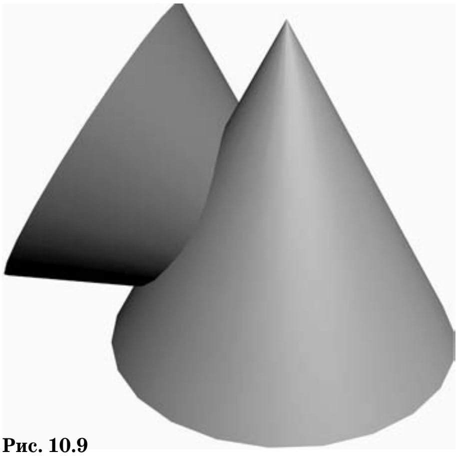


Рис. 10.9

Пример 36

Задание: построить линию пересечения конусов (рис. 10.9).

Решение: для определения фронтальной проекции (рис. 10.10) линии пересечения в качестве поверхностей-посредников примем сферы, центры которых находятся в точке пересечения осей вращения обоих конусов. Показываем опорные точки 1 и 2 — верхняя и нижняя (рис. 10.10). Проведем сферу-

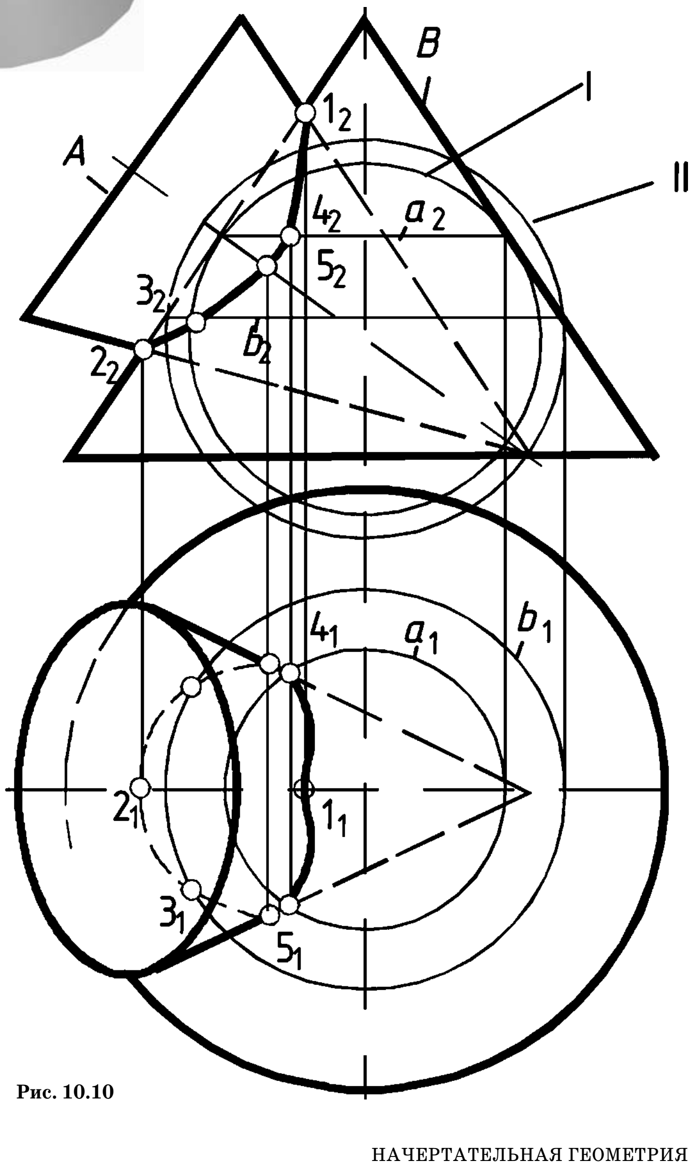


Рис. 10.10

посредник I. Проекции линий пересечения со сферой I конусов A и B пересекутся в точке 4_2, которая будет принадлежать фронтальной проекции линии пересечения конусов. Горизонтальную проекцию этой точки определим по линии связи на горизонтальной проекции линии a_1. Аналогичные построения для сферы II позволят определить точку 3, принадлежащую линии пересечения конусов. Увеличение количества сфер-посредников позволит увеличить точность построения линии. Точки 4 и 5 будут точками перехода от видимой части горизонтальной проекции линии пересечения к невидимой, так как принадлежат самой близкой и самой дальней образующим конуса A.

Горизонтальную проекцию линии пересечения можно определить по горизонтальным проекциям параллелей соответствующих точек либо по проекциям меридианов конуса B.

10.2.2. СПОСОБ ЭКСЦЕНТРИЧЕСКИХ СФЕР

Как было сказано выше, способ эксцентрических сфер может быть использован для построения линии пересечения двух поверхностей, имеющих общую плоскость симметрии. Сущность способа можно пояснить на следующем примере.

Построить линию пересечения четверти тора (кольца) с усеченным конусом (рис. 10.11).

Следует напомнить, что образующая тора вращается вокруг оси, лежащей в плоскости этой окружности, т. е. любая плоскость, проведенная через ось вращения, будет пересекать тор по окружности (рис. 10.12). Для определения промежуточных точек проводим сферу с центром, расположенным в точке пересечения двух линий:

- одна — перпендикулярная плоскости окружности, которая расположена на дополнительной плоскости τ, пересекающей тор (показана на рисунке 10.13*а*), и проходит через ее центр;
- вторая — ось конуса.

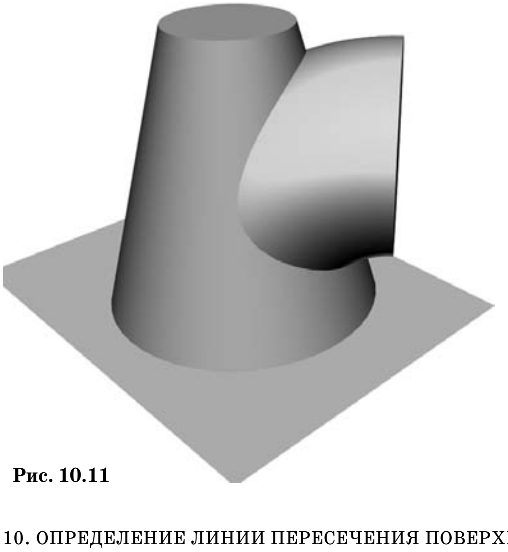


Рис. 10.11

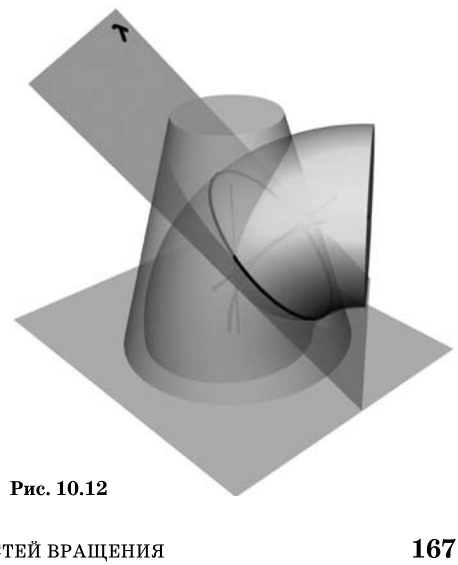


Рис. 10.12

Дополнительная сфера-посредник пересечет тор по двум линиям. Интересующая нас линия показана на рисунке 10.13*а*. Эта же сфера пересечет конус по двум окружностям, так как она расположена на оси конуса. Пересечение последних с линией окружности тора даст нам положение четырех промежуточных точек (A, B и две невидимые, расположенные симметрично плоскости симметрии, проведенной через прямые, определяющие положение центра сферы) (рис. 10.13*б*).

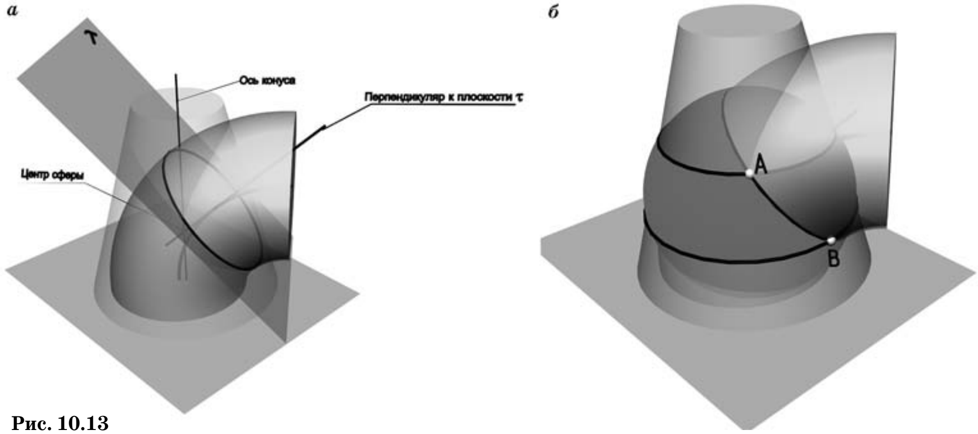
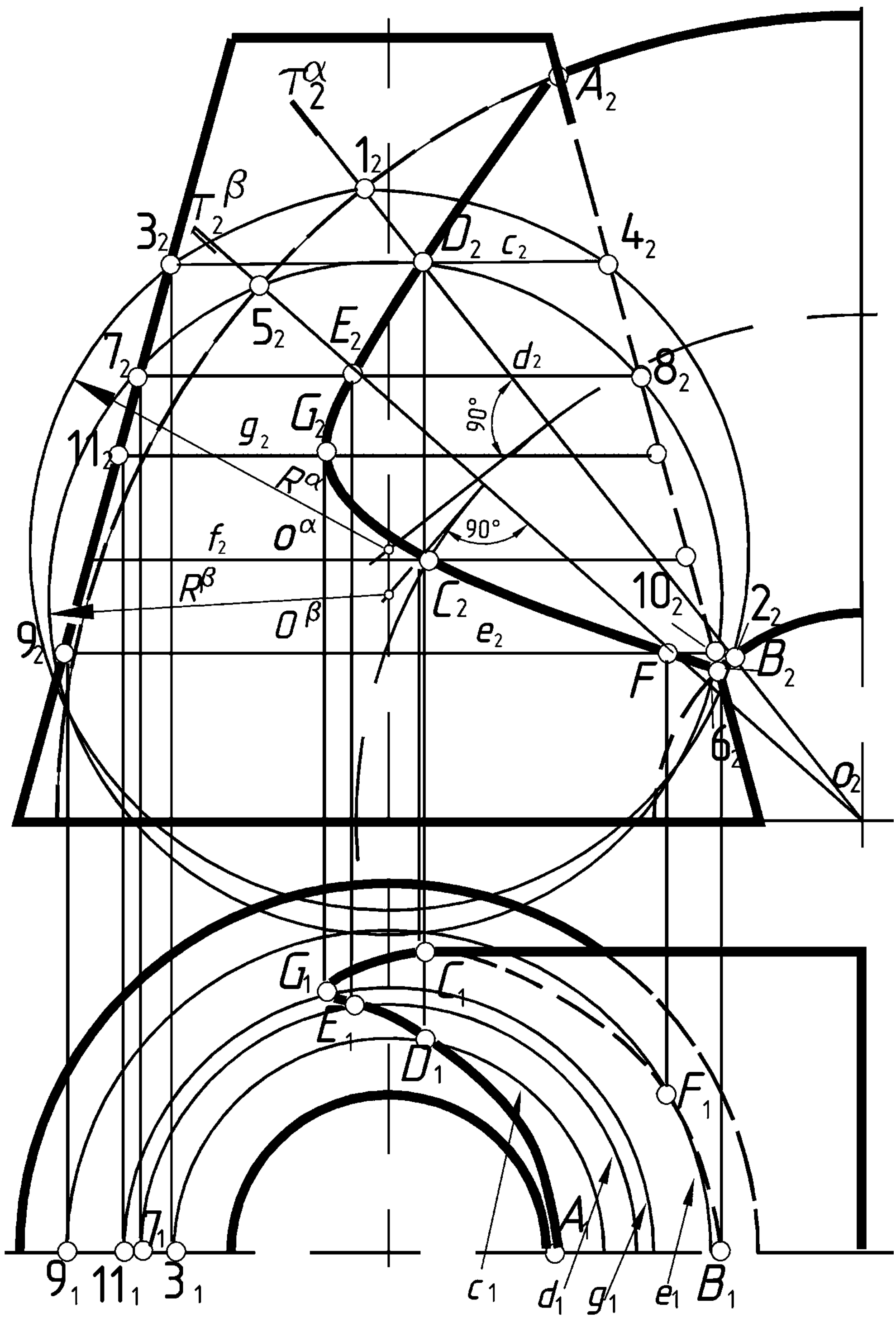


Рис. 10.13

На рисунке 10.14 приведено решение задачи, выполненное на комплексном чертеже. Показываем фронтальные проекции опорных точек A и B как высшую и низшую линии пересечения соответственно. Промежуточные точки определяем при помощи сфер-посредников, центр которых будет находиться на пересечении оси вращения конуса и перпендикуляра, восстановленного к центру окружности, полученной в результате пересечения вспомогательной фронтально проецирующей плоскости, проведенной через ось вращения тора.

Определяем центр сферы-посредника α. Через фронтальную проекцию оси вращения тора O_2 проводим фронтально проецирующую плоскость τ^α, которая пересечет тор по окружности 1–2. Перпендикулярно центру последней проведем прямую до пересечения с осью вращения конуса. Точка пересечения O^α будет центром сферы-посредника радиусом R^α (от центра O^α до точки пересечения τ^α с фронтальной проекцией тора). Сфера пересечет тор по окружности, проходящей через точки 1, 2, а конус — по окружности, проходящей через точки 3, 4. Точка пересечения фронтальных проекций данных окружностей (точка D_2) будет проекцией точки, принадлежащей как тору, так и конусу. Горизонтальную проекцию точки D найдем, показав горизонтальную проекцию окружности c, определив ее по точке 3. Аналогично находим проекции точек E и F: показываем фронтально проецирующую плоскость τ^β; сфера-посредник (центр O^β) пересечет конус по двум окружностям, которые позволят определить проекции двух точек — точки E (пересечение d_2 и τ_2^β) и точки F (пересечение e_2 и τ_2^β).



T_2^α
A_2
1_2
T_2^β
3_2
D_2
c_2
4_2
5_2
E_2
7_2
d_2
8_2
G_2
$90°$
g_2
11_2
R^α
f_2
O^α
$90°$
R^β
10_2
2_2
O^β
C_2
e_2
9_2
B_2
F
6_2
O_2
G_1
C_1
E_1
D_1
F_1
7_1
A_1
9_1
11_1
3_1
c_1
d_1
g_1
e_1
B_1

Рис. 10.14

Фронтальная проекция точки C (разграничение видимой части горизонтальной проекции линии пересечения) определяется по фронтальной проекции на штрихпунктирной линии тора (на фронтальной проекции эта линия совпадет с самой ближней и дальней образующей тора), ниже которой все точки тора не видны сверху. Для определения точки C_2 необходимо показать фронтальную проекцию окружности f_2 диаметром, равным диаметру образующей ($d_f = d_h$). Пересечение этой окружности со штрихпунктирной линией тора будет фронтальной проекцией точки C. Ее горизонтальную проекцию определим по линии связи.

В машиностроительном черчении линии пересечения тел называют линиями перехода и, как правило, их вычерчивают приближенно в виде дуг окружностей.

10.3. ТЕОРЕМА МОНЖА

Теорема Монжа вытекает из того положения, что порядок линии пересечения поверхностей равен произведению порядков поверхностей. Поэтому две поверхности второго порядка всегда пересекаются по кривой четвертого порядка. При определенных условиях эта кривая распадается на несколько линий более низкого порядка. При этом сумма порядков линий, на которые распадается алгебраическая кривая, равна порядку самой линии. В частности, кривая четвертого порядка может распадаться на четыре прямые линии или две кривые второго порядка. Как следствие этого утверждения можно сформулировать теорему Монжа.

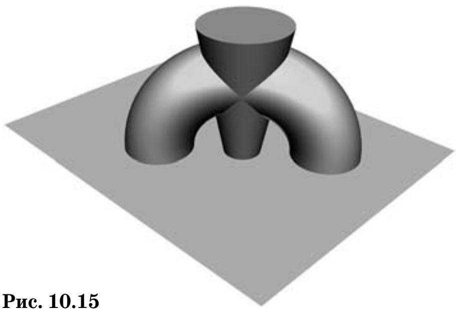


Рис. 10.15

Если две поверхности второго порядка описаны около третьей поверхности второго порядка или вписаны в нее, то линия их пересечения распадается на две кривые второго порядка, плоскости которых проходят через прямую, соединяющую точки пересечения линий касания (рис. 10.15).

Как видно из рисунков 10.15 и 10.16*а*, две поверхности — тор и конус пересеклись по двум плоским ли-

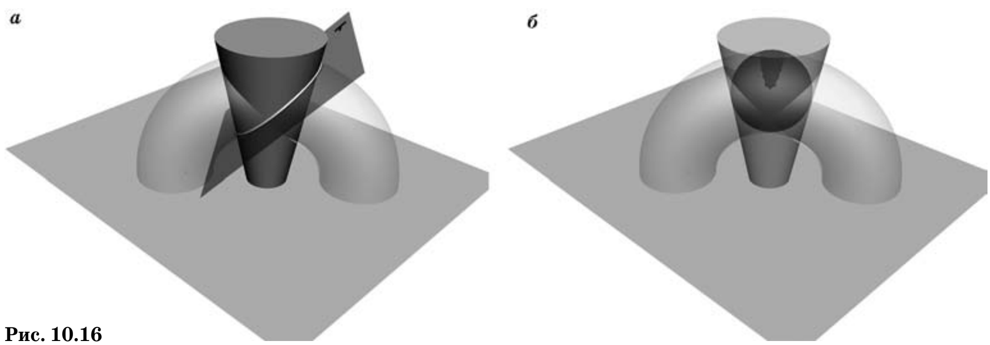


Рис. 10.16

ниям, пересекающимся в двух точках (одна видима, другая нет).

Для построения линии пересечения достаточно посмотреть на расположение плоскости, в которой располагается линия по отношению к одной из фигур (тору или конусу), так как построение линии пересечения конуса и плоскости известно. В данном случае плоскость пересекает конус, образуя эллипс (рис. 10.16*б*). Далее остается построить эллипс по известным методикам.

Пример 37

Задание: определить линию пересечения конусов, показанных на рисунке 10.17.

Решение: сферу γ впишем в конические поверхности α и β (рис. 10.18).

Поверхность α соприкасается со сферой γ по окружности, проходящей через точки

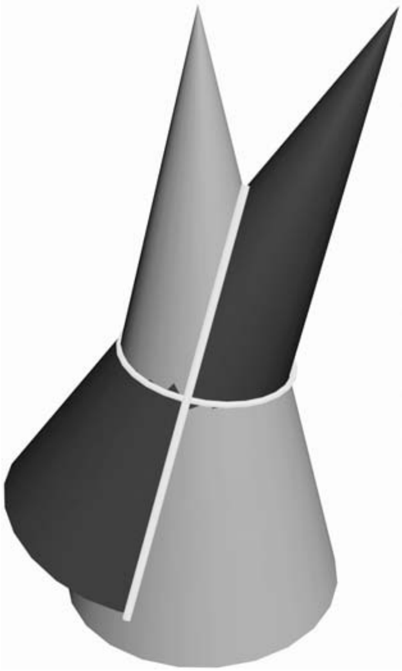


Рис. 10.17

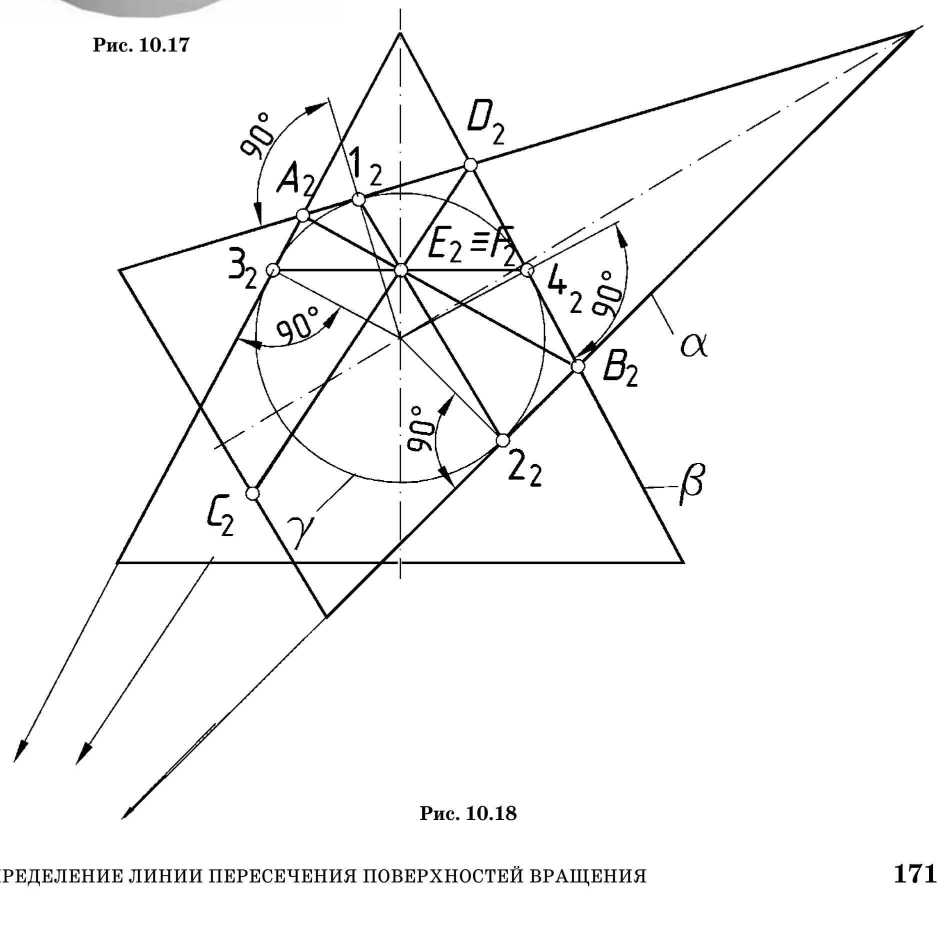


Рис. 10.18

1 и 2, а с поверхностью β — по окружности, проходящей через точки 3 и 4. Точки пересечения этих окружностей E и F являются точками соприкосновения поверхностей α и β.

Показанные на рисунке 10.18 конические поверхности α и β пересекаются по двум плоским кривым: AB — эллипс, CD — часть эллипса GD. Точка G (большой оси эллипса) находится на пересечении главных меридианов конусов α и β.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Указать алгоритм построения линии пересечения поверхностей вращения.
2. Описать способы секущих плоскостей и сферических посредников при определении линии пересечения поверхностей.
3. Сформулировать теорему Монжа.
4. Привести практические примеры применения теоремы Монжа в машиностроении.

11 РАЗВЕРТКИ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Многие детали и другие технические конструкции изготовляют из гнутого листового материала. В качестве заготовок для их изготовления применяют развертки поверхностей. Построение разверток изделий и изделий по разверткам — важная техническая задача.

11.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Под *разверткой поверхности* следует понимать гибкую, нерастяжимую пленку. Если поверхность может быть совмещена с плоскостью без разрывов и деформаций, то такую поверхность называют развертывающейся, а поверхности, которые нельзя совместить с плоскостью, называются *неразвертывающимися поверхностями*.

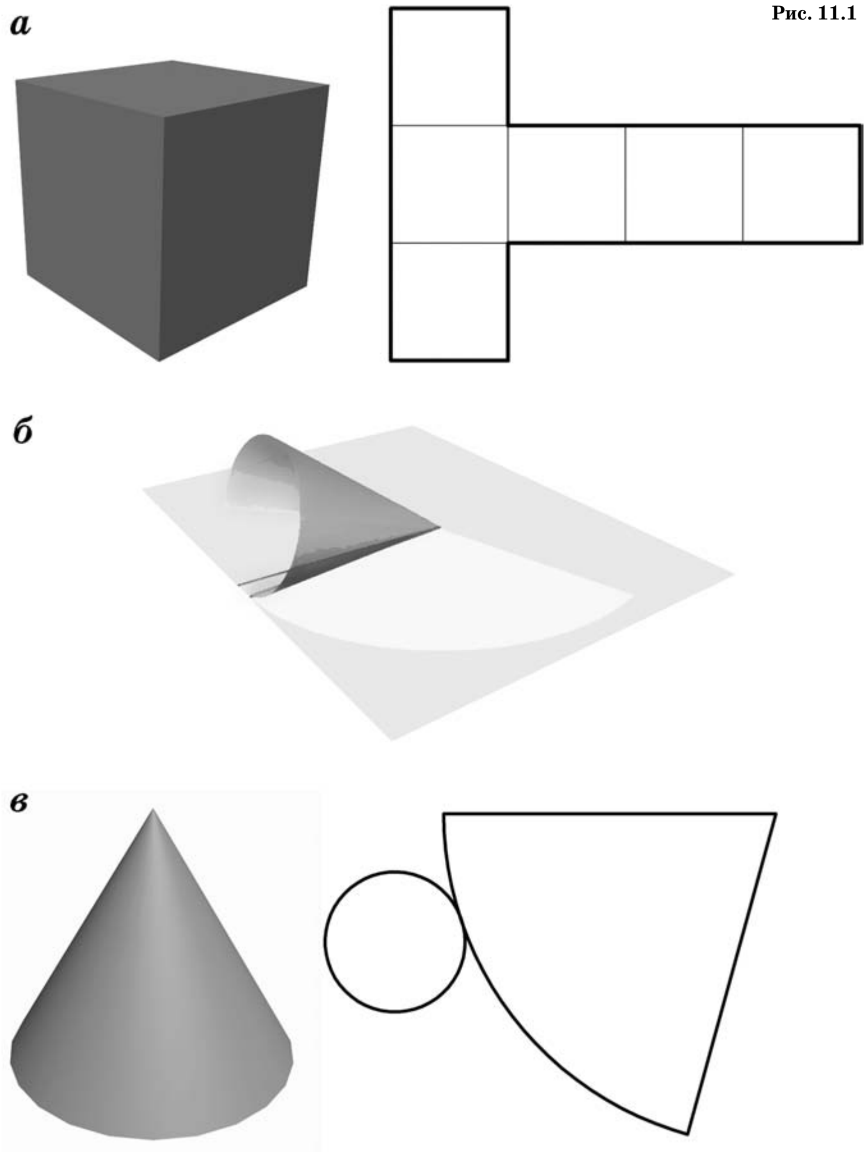
На рисунке 11.1*а* показана развертываемая поверхность куба и ее развертка. Линия сгиба обозначена штрихпунктирной линией с двумя точками.

Изображение развертываемой конической поверхности показано на рисунке 11.1*б*, а на рисунке 11.1*в* — ее развертка. Очевидно, что длина окружности основания конуса будет равна длине дуги развертки сектора конической поверхности.

Сфера (рис. 11.2*а*) имеет поверхность, которая не может быть совмещена с плоскостью без разрывов. В зависимости от степени точности она может быть разбита на различные по форме и количеству сегменты различных размеров. В качестве примера на рисунке 11.2*б* приведена развертка, состоящая из 6 сегментов, на рисунке 11.2*в* — из 12, а на рисунке 11.2*г* — из 18.

Таким образом, увеличивая количество сегментов, мы приближаем поверхность к идеальной форме. Такая развертка будет называться *условной*.

Рис. 11.1



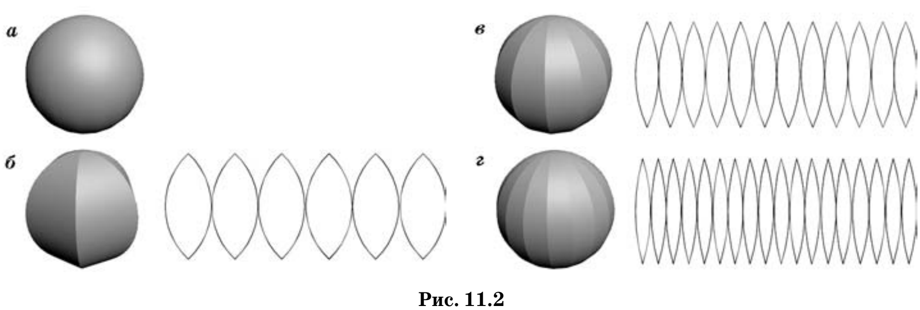


Рис. 11.2

К группе развертывающихся поверхностей относятся только линейчатые поверхности, и в частности те из них, которые имеют пересекающиеся смежные образующие, причем точка пересечения может как находиться в бесконечности (несобственная точка — цилиндрическая поверхность), так и не находиться в ней (собственная точка — конические поверхности).

11.2. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА РАЗВЕРТКИ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Если по определению развертка поверхности представляет плоскую фигуру, образованную из поверхности без разрывов и деформаций, то между сегментами развертки устанавливается взаимно однозначное соответствие — каждой точке (фигуре) на поверхности соответствует точка (фигура) на развертке и наоборот.

Расстояние между любыми точками на фигуре равно расстоянию между точками на развертке. Учитывая сказанное выше, можно определить следующие свойства развертки:

1) длины соответствующих линий поверхности и ее развертки равны между собой и, как следствие, замкнутая линия на поверхности ограничивает площадь, равную площади, ограниченной соответствующими линиями на развертке;

2) угол между линиями на поверхности равен углу между соответствующими им линиями на развертке;

3) прямой на поверхности соответствует также прямая на развертке (однако обратное утверждение не имеет смысла);

4) параллельным прямым на поверхности соответствуют также параллельные прямые на развертке;

5) если линии принадлежащей поверхности и соединяющей две точки поверхности, соответствует прямая на развертке, то эта линия соединяет кратчайшим путем две точки, также принадлежащие поверхности.

11.3. РАЗВЕРТКА ПОВЕРХНОСТИ МНОГОГРАННИКОВ

При построении развертки гранных поверхностей необходимо построить фигуру, состоящую из граней этой поверхности, совмещенную с плоскостью.

Существуют три способа построения развертки многогранников:

- первый — способ нормального сечения;
- второй — способ раскатки;
- третий — способ треугольников (триангуляции).

Первые два способа применяются для построения развертки призматических поверхностей, последний — для пирамидальных поверхностей.

11.3.1. СПОСОБ НОРМАЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ

Способ применяется тогда, когда большее количество ребер параллельны друг другу и параллельны какой-либо плоскости проекций, тогда они проецируются на эту плоскость без искажения. Таким образом, данный способ наиболее рационально применять для призм. Если ребра призмы занимают произвольное положение, то для построения развертки необходимо преобразовать чертеж призмы таким образом, чтобы ребра заняли параллельное какой-либо плоскости проекций положение.

В качестве примера рассмотрим построение развертки трехгранной наклонной призмы $ABCDEF$ (рис. 11.3). Ребра CF, AD и BE параллельны фронтальной плоскости проекций.

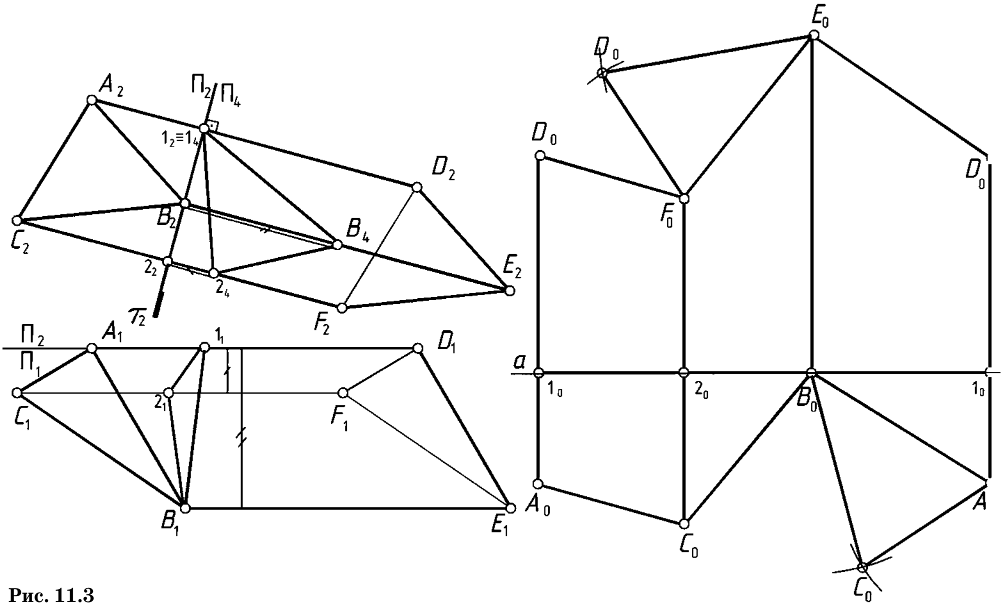


Рис. 11.3

Для построения развертки пересечем призму фронтально проецирующей плоскостью τ. Плоскость проводим через точку B, перпендикулярно боковым ребрам призмы. Для определения натуральной величины сечения плоскостью покажем дополнительную плоскость проекций Π_4, перпендикулярную плоскости Π_2. Полученная проекция сечения будет иметь натуральную величину треугольника.

На произвольной прямой a отложим отрезки $[1_0 2_0]$, $[2_0 B_0]$, $[B_0 1_0]$, равные сторонам треугольника 12B. В точках 1_0, 2_0 и 3_0 проведем линии, перпендикулярные прямой a, на которых отложим отрезки, равные соответствующим длинам боковых ребер ($[1A]$, $[1D]$, $[2C]$, ...). Полученные точки $A_0 C_0 B_0 A_0$ и $D_0 F_0 E_0 D_0$ соединяем отрезками прямых линий. Полученная плоская фигура $A_0C_0B_0A_0D_0E_0F_0D_0$ представляет собой развертку боковой поверхности призмы.

Чтобы получить полную развертку, достроим основания призмы $A_0C_0B_0$ и $D_0F_0E_0$. На развертке основания призмы можно достраивать на любом из отрезков ломаных линий $A_0 C_0 B_0 A_0$ и $D_0 F_0 E_0 D_0$.

11.3.2. СПОСОБ РАСКАТКИ

В том случае, когда ребра боковой поверхности и основания призмы проецируются в натуральную величину, для построения развертки целесообразно использовать способ раскатки. Таким образом, для способа раскатки необходимо, чтобы основания призмы были параллельны какой-либо плоскости проекций, а ребра — другой плоскости проекций.

На рисунке 11.4 показана трехгранная призма, у которой основания параллельны фронтальной плоскости проекций, а ребра — горизонтальной плоскости проекций. За плоскость развертки примем плоскость, параллельную горизонтальной плоскости проекций и проходящую через ребро EB. Далее для каждого ребра боковой поверхности произведем преобразование комплексного чертежа методом вращения вокруг прямой уровня. В данном примере прямыми уровнями (горизонтали) являются ребра боковой поверхности.

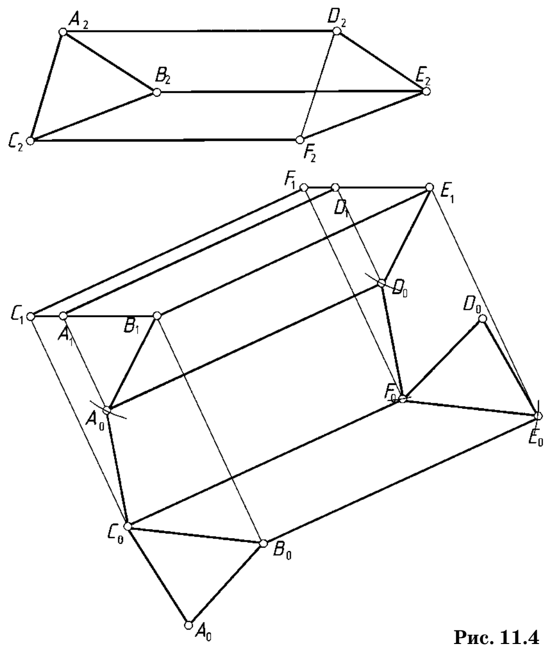


Рис. 11.4

Таким образом, получим развертку боковой поверхности призмы. Добавляем основания призмы, натуральная величина которых является их фронтальными проекциями.

11.3.3. СПОСОБ ТРЕУГОЛЬНИКОВ (ТРИАНГУЛЯЦИИ)

Как было отмечено выше, данный способ удобнее всего применять для пирамиды. Способ основан на вращении ребер пирамиды вокруг проецирующей прямой.

Развертка боковой поверхности пирамиды представляет собой плоскую фигуру, состоящую из треугольников — граней пирамиды.

На рисунке 11.5 определение длин боковых ребер пирамиды выполнено с помощью вращения их вокруг горизонтально проецирующей прямой i, проходящей через вершину пирамиды S. Путем вращения ребра пирамиды совмещаются с плоскостью, параллельной фронтальной плоскости проекций (на рисунке 11.5 показаны тонкими линиями).

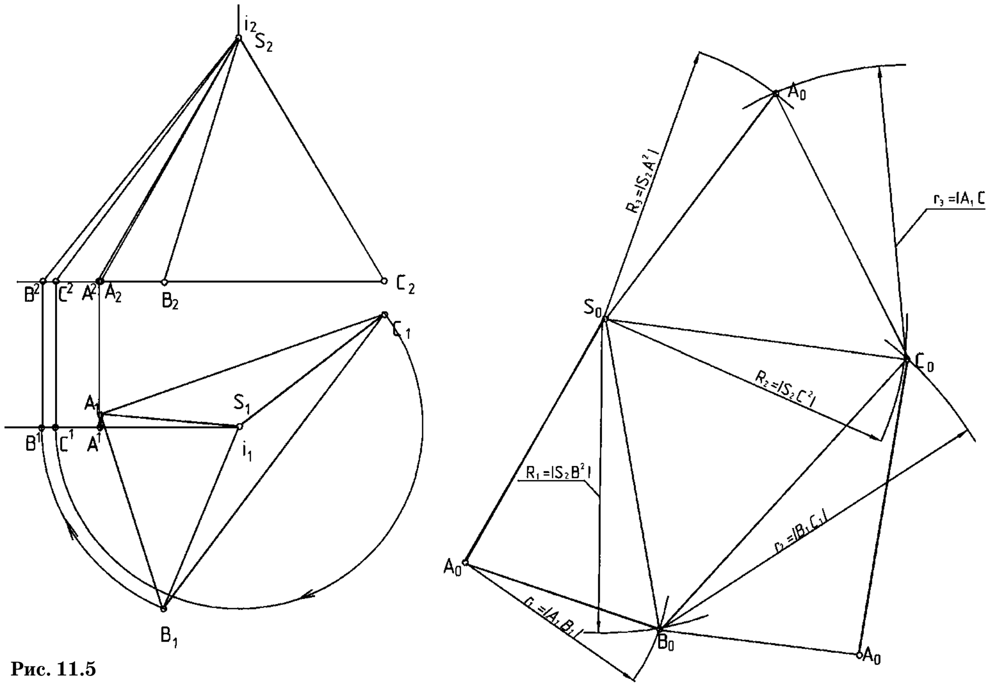


Рис. 11.5

Для построения развертки выполняют последовательное построение боковых граней пирамиды. Откладывается длина одного из боковых ребер, например A_0S_0. Из вершин отрезка, как из центров, проводят до взаимного пересечения дуги, радиусы которых равны длине соседнего бокового ребра (BS) и ребра основания (AB), имеющих общую вершину. Точка пересечения дуг даст положение искомой (B_0) вершины на развертке, соединив которую с вершинами отрезка, получим натуральную величину боковой грани. Выполнив аналогичные последовательные построения, находим положение вершин, позволяющих выполнить чертеж остальных боковых граней развертки.

Затем достраиваем основание пирамиды, которое на фронтальной проекции имеет натуральную величину.

11.4. ПОСТРОЕНИЕ ПРИБЛИЖЕННЫХ РАЗВЕРТОК РАЗВЕРТЫВАЮЩИХСЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Развертка любой развертывающейся поверхности, кроме многогранников, является приближенной. Это объясняется тем, что при построении развертки поверхности происходит ее аппроксимация поверхностями вписанных или описанных многогранников, имеющих грани в виде прямоугольников или треугольников. Поэтому при графическом выполнении развертки поверхности всегда приходится производить разгибание или спрямление кривых линий, принадлежащих поверхности, что приводит к потере точности.

При построении развертки цилиндра его аппроксимируют призмой, а конуса — пирамидой. Количество граней определяет степень точности построения развертки. Далее, используя приведенные выше способы построения развертки гранных тел, строят развертку поверхностей.

11.5. УСЛОВНАЯ РАЗВЕРТКА ПОВЕРХНОСТЕЙ

Для неразвертываемых поверхностей применяют условную развертку. Для таких поверхностей при их изготовлении из листового материала, кроме изгибания, приходится осуществлять сжатие или растяжение отдельных участков. Поэтому при решении задач на построение условной развертки этих поверхностей отсеки заданной поверхности аппроксимируются отсеками развертывающихся поверхностей — гранными, цилиндрическими или коническими.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Какие поверхности называются развертывающимися?
2. Какие поверхности обладают свойством развертываемости?
3. Какие существуют способы построения условных разверток?
4. Что представляет собой развертка многогранника?
5. Перечислить способы разверток гранных поверхностей.
6. В чем сущность способов нормального сечения и раскатки?
7. Как построить условную развертку неразвертывающихся поверхностей?

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представленные в учебнике материалы направлены на сближение теории геометрии с инженерной практикой. Их изучение будет способствовать развитию навыков пространственного мышления.

Авторами было показано применение основных положений при изображении предметов на чертежах. Линии связи позволяют говорить о проекционной связи. Ортогональное проецирование дает возможность строить виды, разрезы, сечения. Если говорить о дополнительных видах, наклонных и ломаных разрезах, то возможность их построения была представлена в разделе «Преобразования комплексного чертежа». Знание основных геометрических свойств тел вращения необходимо для дальнейшего применения, поскольку большинство деталей механизмов машиностроения получают путем обработки на станках, имеющих в основе процесс вращения заготовки или режущего инструмента.

Остается пожелать студентам успешного использования полученных знаний и навыков при выполнении технических чертежей.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Бубенников, А. В.* Начертательная геометрия. Задачи для упражнений. — М. : Высш. шк., 1981. — 296 с.
2. *Бударин, О. С.* Начертательная геометрия: учеб. пособие. — 2-е изд., испр. — СПб. : Лань, 2009. — 352 с.
3. *Дергач, В. В.* Начертательная геометрия: учеб. пособие / В. В. Дергач, А. К. Толстихин, И. Г. Борисенко. — 3-е изд., перераб. и доп. — Красноярск : Сиб. федер. ун-т, 2011. — 144 с.
4. *Дудкина, Л. А.* Начертательная геометрия: учеб. / Л. А. Дудкина, С. О. Немолотов. — СПб. : Лань, 2012. — 256 с.
5. *Левицкий, В. С.* Машиностроительное черчение и автоматизация выполнения чертежей: учеб. для студентов вузов. — 8-е изд., перераб. и доп. — М. : Юрайт, 2011. — 435 с.
6. *Лызлов, А. Н.* Начертательная геометрия. Задачи и решения: учеб. пособие / А. Н. Лызлов, М. В. Ракитская, Д. Е. Тихонов-Бугров. — СПб. : Лань, 2011. — 96 с.
7. *Монж, Г.* Начертательная геометрия / пер. с фр. В. Ф. Газе. — М. : Изд-во АН СССР, 1947. — 291 с.
8. *Нартова, Л. Г.* Начертательная геометрия: учеб. / Л. Г. Нартова, В. И. Якунин. — 3-е изд., испр. — М. : Академия, 2011. — 192 с.
9. *Павлова, А. А.* Начертательная геометрия: учеб. для студентов высших учебных заведений. — М. : Астрель, 2001. — 304 с.
10. *Рябинов, Д. Л.* Задачи по начертательной геометрии / Д. Л. Рябинов, В. Д. Засов. — М. : Гос. изд. техн.-теорет. литературы, 1955. — 95 с.
11. *Сорокин, Н. П.* Инженерная графика: учеб. / Н. П. Сорокин, Е. Д. Ольшевский, А. Н. Заикина [и др.]. — 5-е изд., стер. — М. : Лань, 2011. — 392 с.
12. *Талалай, П. Г.* Начертательная геометрия. Инженерная графика. Интернет-тестирование базовых знаний: учеб. пособие. — СПб. : Лань, 2010. — 256 с.
13. *Фазлулин, Э. М.* Инженерная графика: учеб. / Э. М. Фазлулин, В. А. Халдинов. — 3-е изд., испр. — М. : Академия, 2008. — 400 с.

14. *Фазлулин, Э. М.* Сборник упражнений по инженерной графике: учеб. пособие / Э. М. Фазлулин, В. А. Халдинов. — М. : Академия, 2010. — 192 с.
15. *Фролов, С. А.* Начертательная геометрия: учеб. для втузов. / С. А. Фролов. — 2-е изд., перераб. и доп. — М. : Машиностроение, 1983. — 240 с.
16. *Фролов, С. А.* Сборник задач по начертательной геометрии. — 4-е изд., стер. — СПб. : Лань, 2012. — 192 с.
17. *Чекмарев, А. А.* Начертательная геометрия и черчение: учеб. — 4-е изд., испр. и доп. — М. : Юрайт, 2012. — 471 с.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ

Владимир Владимирович КОРНИЕНКО,
Владимир Викторович ДЕРГАЧ,
Анатолий Константинович ТОЛСТИХИН,
Ирина Геннадьевна БОРИСЕНКО

НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Учебное пособие

Издание четвертое,
исправленное и дополненное

Зав. редакцией инженерно-технической
литературы *В. А. Моисеева*
Технический редактор *И. П. Редькина*
Верстка *Л. Е. Голод*
Выпускающие *О. И. Смирнова, Н. В. Черезова*

ЛР № 065466 от 21.10.97
Гигиенический сертификат 78.01.07.953.П.007216.04.10
от 21.04.2010 г., выдан ЦГСЭН в СПб

Издательство «ЛАНЬ»
lan@lanbook.ru; www.lanbook.com
192029, Санкт-Петербург, Общественный пер., 5.
Тел./факс: (812) 412-29-35, 412-05-97, 412-92-72.
Бесплатный звонок по России: 8-800-700-40-71

Подписано в печать 11.04.13.
Бумага офсетная. Гарнитура Школьная. Формат 70×100 $^{1}/_{16}$.
Печать офсетная. Усл. п. л. 15,60. Тираж 1000 экз.

Заказ №   .

Отпечатано в полном соответствии с качеством
предоставленных материалов в ГУП ЧР "ИПК "Чувашия"
Мининформполитики Чувашии
428019, г. Чебоксары, пр. И. Яковлева, д. 13
Тел.: (8352) 56-00-23